



TITLE:

渦層の時間発展と特異点：それでも渦層は巻き上がる？

AUTHOR(S):

坂上, 貴之

CITATION:

坂上, 貴之. 渦層の時間発展と特異点：それでも渦層は巻き上がる？. 物性研究 2004, 82(1): 1-44

ISSUE DATE:

2004-04-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/97796>

RIGHT:

渦層の時間発展と特異点 ～それでも渦層は巻き上がる？～*

坂上貴之 (SAKAJO, TAKASHI)
北海道大学大学院理学研究科数学専攻
E-mail: sakajo@math.sci.hokudai.ac.jp

(2004 年 1 月 13 日受理)

1 渦層とは何か

一様な流れが様々な形状の物体を通過した後に発生する流れ (図 1), 飛行機の翼の後背流 (図 2), あるいは木星表面の流れ (図 3) 等は, 極めて複雑な運動を行うことが知られている. こうした流れでは, 速度場が急激に変化する狭い領域の挙動が, 全体の運動に本質的な役割を果たしている. このような領域は, せん断流領域 (Shear flow regions) と呼ばれ, 航空工学や環境工学, 惑星物理学などの分野における重要な研究対象である. また, 流れの乱流遷移の初期過程を記述する問題として理論的にも重要である.

こうした流れの時間発展を, なんらかの数理モデルによって理解することが我々の目標である. ここで我々は簡単なモデルを構成するため, 流れは非粘性・非圧縮 (縮まない) 流体であり, 速度場の変化する領域が極めて薄い領域 (曲面) であると仮定する. この時, 流れの速度場を \vec{u} とすると, その渦度 $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}$ は δ -関数的にこの曲面上に分布し, その面を境にして面の接線方向の速度場が不連続になる. このような速度場の不連続曲面のことを「渦層」と呼ぶ.

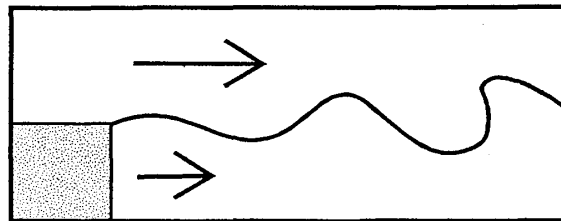


図 1: 渦層の例: 物体の上部で速い流れを発生させると, 物体の角のあたりで急激に速度場が変化する領域ができる. この領域境界は複雑な形状に遷移する.

*本稿は, 編集部の方から特にお願いして執筆していただいた記事である.

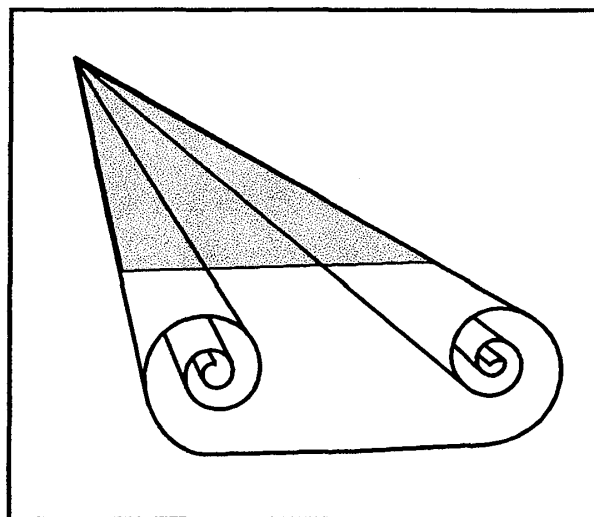


図 2: 渦層の例：三角形翼の後方にできる流れの不連続面の様子のイメージ図. 飛行機が前に進むと翼の上側と下側の速度場に大きな差が生じる. その結果, 速度場の急激に変化する領域が生まれ, その領域は図のような螺旋渦が出現する.

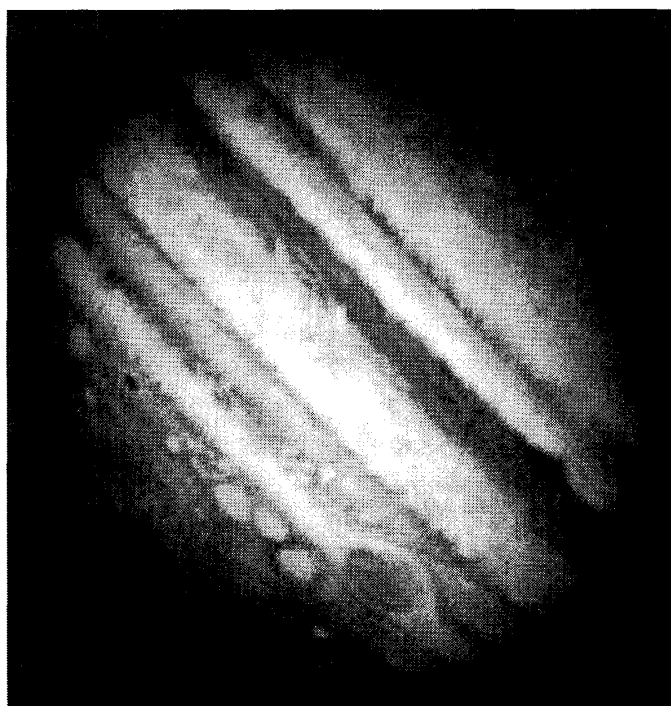


図 3: 渦層の例：木星の表面での流れ. 木星表面に特有の縞模様の中には東西への強いジェット気流が存在しているので, それらの境界では速度場の向きが大きく変化する. この縞模様の境界面の一つを取り出すと渦層の問題と見ることができる.

本稿では、最も簡単な渦層の例として、主に二次元渦層を考える。これは翼の後ろで生成する流れの簡単なモデルとして 1930 年頃から研究されてきたが、1962 年に Birkhoff[6] は、二次元渦層が次の段階を経て時間発展すると指摘した。

- I. (線形不安定性) 初期摂動の線形不安定化が起こる段階
- II. (摂動の成長) 初期摂動の成長が渦層の全体的な変形に変わる段階
- III. (螺旋への巻き上がり) 新しい安定な形状 (螺旋形) への遷移段階

この問題提起をきっかけに、数理的な研究が進展し、特に滑らかな初期値からスタートした渦層が最終的に螺旋渦巻形に遷移するかを調べるのが二次元渦層に関わる中心課題の一つである。この問題に対して、過去 30 年にわたって行われた数学解析や数値計算の結果について解説する。なお、渦層に関するサーベイ論文として、解析的な成果については Caffisch[14] によるものが、数値的な話題については Krasny[41] によるものがある。本稿は、これら論文の内容に加え、サーベイ範囲を現在にまで広げてこれを紹介するものである。

まず、渦層の時間発展を数学的に扱う方法は二つある。一つはある与えられた曲面上に初期渦度が δ 関数的に分布する時の非圧縮 Euler 方程式の解を求めること。もう一つは、この曲面自身の時間発展方程式を記述し、その解を考えるというものである。実際に後者が指摘するような曲面方程式を記述することは可能である。というのも非圧縮・非粘性流れに対する Lagrange の定理によれば、渦度は時間発展の途中で生成も消滅もせず、渦層は全時間発展を通じてあたかも実在する曲面のように自律的に時間発展するからである。この方針に従って、第二章では渦面の運動方程式を導出する。

第三章では、この二次元渦層方程式の数学解析と数値解析を通じて明らかになった事実を解説する。線形安定性解析により、渦層は時間発展の初期において Kelvin Helmholtz 不安定性と呼ばれる不安定性を持つ。さらに、漸近解析により、滑らかな初期値から始めた解に有限時間で特異点が生成する。一方、計算機の性能の進歩に伴い、渦層方程式の数値的研究も進展し、二重螺旋形をした自己相似解の存在も知られている。

しかし、二次元渦層において、これらの二つの解の関係、すなわち、有限時間で特異点を生成する渦層方程式の解が二重螺旋に巻き上がるかどうかは現在も明らかになっていない。もちろん特異点が生成するという事実から考えれば、滑かな二重螺旋渦巻への巻き上がりは期待できない。しかし、何らかの特異性を持つ二重螺旋渦巻であれば、これら二つの解は繋がるかもしれない。この点を踏まえて、第四章では渦層に発生する特異点と二重螺旋渦巻構造の関係について複素時間平面上の特異点分布の観点から調べた著者の研究結果を紹介する。最後の章では現在の渦層研究の中心になりつつある三次元渦層に関する研究成果の簡単な紹介を行う。

2 渦層の問題の定式化

歴史的に言えば渦層の運動方程式として最初に Birkhoff[6] によって提案されたのは二次元の渦層方程式である。その後、80 年代後半になって Kaneda[35] や Caffisch & Li[15] らによって三次元渦層方程式の定式化がなされるに至り、二次元渦層方程式は三次元のそれから形式的

な縮約により導出できることが明らかになった。そこで、現在における渦層研究の中心が三次元の問題になっていることなども考慮して、まず三次元渦層の方程式の導出を紹介し、この方程式に二次元対称性を仮定して、二次元渦層の Birkhoff-Rott 方程式を構成する。

その前に若干の注意をしておく。方程式が形式的に求められると言っても、物理的な観点より見れば、この方程式の縮約により、物理的には流れの性質が大きく変化する。すなわち、二次元非粘性・非圧縮流において渦度は保存量であるが、一方で三次元流では渦度は渦線のひき伸ばし (vortex stretching) の効果により保存量ではない。この性質の違いのために二次元 Euler 方程式の解の存在や一意性が保証されるのに対して、三次元ではそれらの問題は未解決のままである。こうした事情を考慮すれば、形式的な縮約ではあるが二次元渦層の問題は著しく簡単になっているはずである。しかし、この二次元の問題においてすら以下の章に示すような様々な興味深い性質が知られており、これに渦度の変化という要素を加えた三次元渦層の場合には、さらに複雑で面白い現象が見られるはずである。その解明こそが三次元渦層研究の醍醐味である。

なお、二次元渦層の方程式のみならず、この三次元渦層方程式に様々な対称性を仮定すれば軸対称性や螺旋対称性を持つ渦層方程式、あるいは球面上の渦層方程式などが構成できる。これについては論文 [15, 71] を参照のこと。

今、密度一定の三次元非圧縮流れを考える。これは次の Euler 方程式に従う。

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\nabla p, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0. \quad (2)$$

ただし、 \vec{u} は速度、 p は圧力を示す。渦層の仮定から渦度 ($\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}$) が無限に薄い滑らかな曲面 S だけに集中しているとし、その曲面の外側で渦無しとする。この時、曲面を除く各領域内で、ある速度ポテンシャル関数 ϕ が存在する：

$$\vec{u} = \nabla \phi, \quad \operatorname{div} \vec{u} = \Delta \phi = 0, \quad \text{in } \mathbf{R}^3 \setminus S. \quad (3)$$

また、(1) と (3) から S によって区切られた二つの各領域でそれぞれ Bernoulli の定理が成立している。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{(\vec{u} \cdot \vec{u})}{2} + p = (\text{時間 } t \text{ だけの関数}). \quad (4)$$

曲面 S は無限に薄いと仮定したので、質量保存則 (2) により曲面上の法線方向の速度場の大きさは同じでなければならない。すなわち、 S 上の任意の点において、

$$\vec{u}^+ \cdot \vec{n} = \vec{u}^- \cdot \vec{n},$$

が成立している。ただし、 \vec{n} は S の単位法線ベクトルであり、 \vec{u}^\pm は曲面の位置ベクトル \vec{r} に対して、次のように定義されている：

$$\vec{u}^\pm(\vec{r}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \vec{u}(\vec{r} \pm \delta \vec{n}).$$

また同様に、運動量保存の法則により、圧力は面を境にして連続である。すなわち、

$$[p] = 0. \quad (5)$$

ただし, $[A]$ は S を境にした量 A の jump $[A] = A^+ - A^-$ を表す記号である. こうして, 法線速度成分 $\vec{u}_\perp = (\vec{u} \cdot \vec{n})\vec{n}$ と圧力 p は S を境にして連続となるが, 接線方向の速度成分 $\vec{u}_\parallel = \vec{u} - \vec{u}_\perp$ は S を境にして不連続となる.

さて, ポテンシャルの jump $\Phi = [\phi]$, あるいは速度の jump $\vec{U} = [\vec{u}] = [\nabla\phi] = [\vec{u}_\parallel]$ が S 上で定義されれば, S の外側の任意の点 P における速度場は Biot-Savart の法則により,

$$\vec{u}(P) = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \vec{\Omega}(Q) \times \frac{\vec{r}_{PQ}}{|\vec{r}_{PQ}|^3} dS_Q. \quad (6)$$

与えられる. ここで, $\vec{\Omega} \equiv \vec{n} \times [\nabla\phi]$ および $\vec{r}_{PQ} \equiv P\vec{Q}$ である.

ここで, ある時刻 $t = 0$ において, 渦層 S が二つの曲面パラメータ λ_1 と λ_2 によって, $\vec{r} = \vec{R}^0(\lambda_1, \lambda_2)$ のように表現されているとする. 以下において, $t > 0$ に対して, この面がどう動くかを記述する.

[Φ の保存] \vec{V} を S 上で定義された次のような速度とする.

$$\vec{V} \equiv \frac{\vec{u}^+ + \vec{u}^-}{2} = \frac{(\nabla\phi)^+ + (\nabla\phi)^-}{2}.$$

この時, 時刻 $t > 0$ における渦層 $\vec{r} = \vec{R}(\lambda_1, \lambda_2)$ の運動は次で書ける.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{R}}{\partial t} &= \vec{V}(\vec{R}(\lambda_1, \lambda_2, t)), \\ \vec{R}(\lambda_1, \lambda_2, 0) &= \vec{R}^0(\lambda_1, \lambda_2). \end{aligned} \quad (7)$$

これより, 渦層を挟んだ両側におけるポテンシャルの jump Φ を

$$\Phi(\lambda_1, \lambda_2, t) \equiv \phi^+(\vec{R}(\lambda_1, \lambda_2, t)) - \phi^-(\vec{R}(\lambda_1, \lambda_2, t)),$$

と定義すると, 次を得る.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \right] + \vec{V} \cdot [\nabla\phi].$$

一方で, Bernoulli の法則 (4) と (5) から,

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \right] + \frac{[\vec{u} \cdot \vec{u}]}{2} = t \text{ だけの関数},$$

となる. ここで, 渦層の右辺は時間にしかよらないので, これを 0 とおいてよい. したがって,

$$\frac{[\vec{u} \cdot \vec{u}]}{2} = \frac{1}{2}(\vec{u}^+ + \vec{u}^-)(\vec{u}^+ - \vec{u}^-) = \vec{V} \cdot [\nabla\phi],$$

となるので, 結局

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0,$$

を得る. よって, $\Phi(\lambda_1, \lambda_2, t) = \Phi(\lambda_1, \lambda_2, 0) \equiv \Phi^0(\lambda_1, \lambda_2)$ となり, Φ は渦層上の流体粒子の軌道に沿って保存される Lagrange 保存量である.

[方程式の導出] 今, $\vec{R}_i = \frac{\partial \vec{R}}{\partial \lambda_i}$, ($i = 1, 2$) とし, \vec{W} を $\vec{W} \equiv \left| \vec{R}_1 \times \vec{R}_2 \right| \vec{\Omega}$ と定義する. この時, λ_1, λ_2 の向きを $\vec{N} = \vec{R}_1 \times \vec{R}_2$ が右手系になるようにとれば, この \vec{W} は次のように計算できる.

$$\begin{aligned} \vec{W} = J\vec{n} \times [\nabla\phi] &= (\vec{R}_1 \times \vec{R}_2) \times [\nabla\phi] \\ &= (\vec{R}_1 \cdot [\nabla\phi])\vec{R}_2 - (\vec{R}_2 \cdot [\nabla\phi])\vec{R}_1 \\ &= \Phi_1\vec{R}_2 - \Phi_2\vec{R}_1 \\ &= \Phi_1^0\vec{R}_2 - \Phi_2^0\vec{R}_1. \end{aligned}$$

ただし, $\Phi_i \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_i}$, $\Phi_i^0 \equiv \frac{\partial \Phi^0}{\partial \lambda_i}$, ($i = 1, 2$) である. さらに, $dS = Jd\lambda_1d\lambda_2$, $\vec{n}J = \vec{N}$ なので, 我々は (6) と (7) より三次元の渦層の時間発展方程式

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi} \text{pv} \iint_S \frac{\vec{W}(\lambda'_1, \lambda'_2, t) \times (\vec{R}(\lambda_1, \lambda_2, t) - \vec{R}(\lambda'_1, \lambda'_2, t))}{\left| \vec{R}(\lambda_1, \lambda_2, t) - \vec{R}(\lambda'_1, \lambda'_2, t) \right|^3} d\lambda'_1 d\lambda'_2, \quad (8)$$

を得る. なお, 右辺の積分は Cauchy の主値積分の意味で定義されていることに注意する. また, $\vec{\Omega}$ を渦度の強さ (The sheet strength) と呼び, これは次に等価である.

$$\vec{\kappa}(\lambda_1, \lambda_2, t) = \vec{\Omega} = \frac{\Phi_1^0\vec{R}_2 - \Phi_2^0\vec{R}_1}{\left| \vec{R}_1 \times \vec{R}_2 \right|}. \quad (9)$$

[Birkhoff-Rott 方程式の導出] この三次元方程式 (8) を使って, 二次元渦層の運動方程式を導出する. 今, Euclid 座標系 (x, y, z) に対して, 流れが二次元的であるので, その速度場を

$$\vec{u} = u(x, y, t)\vec{e}_x + v(x, y, t)\vec{e}_y + 0\vec{e}_z$$

とする. この時, 渦層の方程式 (9) における \vec{R} と Φ^0 は次で与えられる.

$$\vec{R}(\lambda_1, \lambda_2, t) = (x(\lambda_1, t), y(\lambda_2, t), \lambda_2), \quad \Phi^0(\lambda_1, \lambda_2) = \Phi(\lambda_1).$$

したがって, 方程式の各項を計算すれば,

$$\vec{R}_2 = \vec{e}_z, \quad \Phi_1^0 = \gamma(\lambda_1), \quad \Phi_2^0 = 0, \quad \vec{W} = \gamma(\lambda_1)\vec{e}_z$$

となる. 以下ではこれまでの二次元渦層研究の慣習に従って Lagrange パラメータ λ_1 を Γ と記すことにして, 渦層の位置 $(x(\Gamma, t), y(\Gamma, t))$ を複素数値関数 $z(\Gamma, t) = x(\Gamma, t) + iy(\Gamma, t)$ と同一視すれば, 次の方程式を得る.

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial t}(\Gamma, t) = \frac{1}{2\pi i} \text{pv} \int \frac{\gamma(\Gamma')}{z(\Gamma, t) - z(\Gamma', t)} d\Gamma'. \quad (11)$$

ただし, \bar{z} は z の複素共役を表す. この方程式を Birkhoff-Rott 方程式と呼ぶ. なお, この Lagrange パラメータ Γ は流体力学における循環 (circulation) と呼ばれる量に一致している.

ところで, 渦層に周期境界条件

$$z(\Gamma + 1, t) = z(\Gamma, t) + 1, \quad (12)$$

を課した場合, この方程式は次の形になる.

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial t}(\Gamma, t) = \frac{1}{2i} \text{pv} \int_0^1 \gamma(\Gamma) \cot \pi(z(\Gamma, t) - z(\Gamma'_1, t)) d\Gamma'_1. \quad (13)$$

この方程式は数値計算などでしばしば用いられるので重要である.

最後に, 二次元渦層の強さ $\vec{\kappa}(\Gamma_1)$ は次で与えられる.

$$\vec{\kappa}(\Gamma, t) = \left| \frac{\partial z}{\partial \Gamma} \right|^{-1} \vec{e}_z.$$

これは渦層の空間方向の一階微分に関連した量であることに注意する.

3 二次元渦層の数学解析と数値解析

3.1 Kelvin-Helmholtz 不安定性

平坦な渦層, つまり $z(\Gamma, t) = \Gamma$ は Birkhoff-Rott 方程式 (11) の定常解である. この節では, この定常解の線形安定性を調べる. このような流れが, 不安定化することは古くから知られており, Kelvin-Helmholtz 不安定性と呼ばれている.

まず, 我々は定常解に以下のような微小摂動を加える.

$$z(\Gamma, t) = \Gamma + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(t) e^{in\Gamma}.$$

これを Birkhoff-Rott 方程式に代入して,

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{d\bar{a}_n}{dt} e^{-in\Gamma} &= \frac{1}{2\pi i} \text{pv} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Gamma'}{(\Gamma - \Gamma') \left[1 + \sum e^{in\Gamma} \frac{1 - e^{in(\Gamma' - \Gamma)}}{\Gamma - \Gamma'} \right]} \\ &\approx \frac{1}{2\pi i} \text{pv} \int_{-\infty}^{\infty} d\Gamma' \left(\frac{1}{\Gamma - \Gamma'} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\Gamma} \frac{1 - e^{in(\Gamma' - \Gamma)}}{(\Gamma - \Gamma')^2} \right), \end{aligned}$$

となる. ここで,

$$\text{pv} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta}{\theta} = 0, \quad \text{pv} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{i|n|\theta}}{\theta^2} = \pi|n|,$$

を使うと, 摂動の各スペクトル a_n に対する以下のような線形化方程式を得る.

$$\frac{d\bar{a}_{-n}}{dt} = \frac{i|n|}{2} a_n.$$

また, この式の両辺の複素共役をとって, n と $-n$ を入れ替えると

$$\frac{da_n}{dt} = \frac{|n|}{2i} \bar{a}_{-n},$$

となる. こうして, a_n と \bar{a}_{-n} の線形化方程式の固有値は

$$\sigma_n = \pm \frac{|n|}{2}.$$

で与えられるので, 初期時刻に与えられた摂動の n 次スペクトルの成長モードは $\exp(\sigma_n t)$ のように成長する. この不安定性は高次のモードに与えられた摂動ほど急激に成長することを示している. 高波数不安定性 (high-wavenumber instability) あるいは短波長不安定性 (short-wavelength instability) といわれる. また, この不安定性により, 二次元渦層の初期値問題は Hadamard の意味で非適切 (Ill-posed) である.

なお, 二次元渦層の線形安定性については, 外部流の影響を考慮することで, 摂動の低次モードは中立安定にできること (Kiya & Arie[36], Sakajo & Okamoto[65]) が示されている. また, Moore と Griffith-Jones[51] によって円環形状をした二次元渦層の線形安定性なども調べられている.

3.2 解の局所時間存在

数理モデルとして Birkhoff-Rott 方程式を考えるならば, その初期値問題に局所時間解が存在することは, モデルが妥当であるための必要条件である. この方程式に局所時間解が存在するという予測は Birkhoff[6] によってなされているが, 実際に Sulem, Sulem, Bardos & Frisch[76] らによって, この事実が数学的に示されたのは随分後のことである.

彼らは, 次で定義されたノルムを持つ Banach 空間 B_s を考えた.

$$\|u\|_s = |u|_s + \sup_{(x,\zeta), (x',\zeta) \in b_s} \frac{|u(x+i\zeta) - u(x'+i\zeta)|}{|x-x'|^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

ただし, $|u|_s = \sup_{(x,s) \in b_s} |u(x+i\zeta)|$ であり, $b_s = \{(x,s); x \in \mathbf{R}/\pi\mathbf{Z}, |\zeta| < s\}$ である. この空間に対して, 常微分方程式に対する抽象 Cauchy-Kowalewski の定理 [55] を Birkhoff-Rott 方程式に応用することによって, 次を示した.

Theorem 1 (*Sulem et al. [76]*) ある s_0 に対して, 初期値が B_{s_0} に入っていれば, $|t| < \alpha(s_0 - s)$ で, Birkhoff-Rott 方程式の解は B_s に存在する.

一方, この証明とは別の方法で, Caflisch と Orellana[9] は解の局所時間可解性を示している. 以下にその概略を示す. まず, 解に次の仮定をおく.

$$\begin{aligned} z(\Gamma, t) &= \Gamma + s(\Gamma, t), & (s \text{ は摂動関数}) \\ s(\Gamma + \pi, t) &= s(\Gamma, t), & (s \text{ の周期性}) \\ s(-\Gamma, t) &= -s(\Gamma, t). & (\text{奇関数性}) \end{aligned}$$

また, Γ を複素変数と考えて, 新しい演算子 $*$ を次で定義する.

$$z^*(\Gamma, t) = \bar{z}(\bar{\Gamma}, t).$$

これを Birkhoff-Rott 方程式に代入して,

$$\begin{aligned}\frac{\partial s^*}{\partial t}(\Gamma, t) &= -\frac{1}{2\pi i} \text{pv} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\zeta}{\zeta + s(\Gamma + \zeta) - s(\Gamma)} \\ &\equiv B[s](\Gamma, t), \quad \zeta = \Gamma' - \Gamma.\end{aligned}$$

今, s を複素 Γ 平面の上半平面および下半平面で解析的になる二成分にわけると, すなわち, $s = s_+ + s_-$ として,

$$s_+(\Gamma, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{in\Gamma}, \quad s_-(\Gamma, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{-n} e^{-in\Gamma},$$

と定義する. この時,

$$B[s] = B[s_+ + s_-] = B[s_+] + B[s_-] + D[s_+, s_-],$$

のように $B[s]$ を分解し, 非線形項 D が十分小さいと仮定して

$$\begin{aligned}\frac{\partial s_+^*}{\partial t} &= B[s_+], \\ \frac{\partial s_-^*}{\partial t} &= B[s_-],\end{aligned}$$

と方程式を近似する.

さて, この $B[s_+]$ は具体的に計算ができる. $\int \zeta^{-1} d\zeta = 0$ を考慮すると,

$$\begin{aligned}B[s_+](\Gamma) &= -\frac{1}{2\pi i} \text{pv} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\zeta + s_+(\Gamma + \zeta) - s_+(\Gamma)} - \frac{1}{\zeta} \right) d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \text{pv} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s_+(\Gamma + \zeta) - s_+(\Gamma)}{\zeta + s_+(\Gamma + \zeta) - s_+(\Gamma)} d\zeta.\end{aligned}$$

ここで, $|\partial_{\Gamma} s_+(\Gamma)| < \frac{1}{2}$ が上半平面で成立すると仮定する. この時,

$$|s_+(\Gamma + \zeta) - s_+(\Gamma)| < \frac{1}{2} |\zeta|$$

なので, 被積分関数は原点 $\zeta = 0$ でのみ特異点を持つ. したがって, 原点を避けるような積分経路に対する留数計算から次を得る.

$$B[s_+] = \frac{1}{2} \frac{\partial_{\Gamma} s_+}{1 + \partial_{\Gamma} s_+}.$$

同様に $B[s_-]$ も計算できる.

$$B[s_-] = -\frac{1}{2} \frac{\partial_{\Gamma} s_-}{1 + \partial_{\Gamma} s_-}.$$

これより Birkhoff-Rott 方程式は次のように書ける.

$$\frac{\partial}{\partial t}((s_+)^* + (s_-)^*) = \frac{1}{2} \frac{\partial_{\Gamma} s_+}{1 + \partial_{\Gamma} s_+} - \frac{1}{2} \frac{\partial_{\Gamma} s_-}{1 + \partial_{\Gamma} s_-} + D[s_+, s_-]. \quad (14)$$

ここで、次の関係に注意する.

$$(s_+)^* = (s^*)_-, \quad (s_-)^* = (s^*)_+.$$

この時、作用素 H_+, H_- をそれぞれ与えられた関数の上半平面、下半平面で解析的な成分への射影作用素とすると、(14) より

$$\begin{aligned} \frac{\partial (s_-)^*}{\partial t} &= \frac{1}{2} \frac{\partial_\Gamma s_+}{1 + \partial_\Gamma s_+} + H_+ D[s_+, s_-], \\ \frac{\partial (s_+)^*}{\partial t} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial_\Gamma s_-}{1 + \partial_\Gamma s_-} + H_- D[s_+, s_-], \end{aligned}$$

を得る. 仮定より s は奇関数なので、この二式は同値な方程式である. したがって、 $y = i\Gamma$ と変数変換して、 $f(y) = s_+(\Gamma)$ ととれば、

$$\frac{\partial}{\partial t} f^*(y) = -\frac{1}{2} \frac{i \partial_y f}{1 + \partial_y f} + H_+ D,$$

と一つの式となる. さらに、方程式を次のように変数変換して保存則の形に書き換える.

$$\phi = 1 + i \partial_y f, \quad \varphi = \phi^* = 1 - i \partial_y f^*.$$

この時、

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\phi} \right) + E_1, \quad (15)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\varphi} \right) + E_2, \quad (16)$$

となる. ただし、 $E_1 = i \partial_y (H_+ D)$ そして $E_2 = -i \partial_y (H_+ D)$ である. まず、 E_1 と E_2 を無視した時、この方程式は次の保存則となる.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\phi} \right), \quad (17)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\varphi} \right), \quad (18)$$

この保存則に対する解の存在定理は以下のように与えられる.

Theorem 2 (*Caflisch and Orellana[9]*) 任意の $\kappa > 1$ に対して、ある $\epsilon > 0$ が存在して、 $\rho > 0$, $\phi_i, \varphi_i \in A_\rho = \{\phi \mid \phi \text{ は } \operatorname{Re} y < \rho \text{ で解析的}\}$ が次を満たすとする.

$$\|\phi_i - 1\|_{1\rho} + \|\varphi_i - 1\|_{1\rho} < \epsilon.$$

ただし、 $\phi|_\rho = \sup_{\operatorname{Re} y < \rho} |\phi(y)|$ および $\|\phi\|_{1\rho} = \sup_{\operatorname{Re} y < \rho} (|\phi(y)|_\rho + |\phi_y(y)|_\rho)$ である.

この時、初期条件 $\phi(y, 0) = \phi_i$ と $\varphi(y, 0) = \varphi_i$ に対する、(17) と (18) の解は $0 \leq t \leq \kappa \min(2\rho, \epsilon^{-1})$ で存在する. さらに、 $\phi(\cdot, t), \varphi(\cdot, t) \in A_{\rho(t)}$, $(\rho(t) = \rho - \kappa^{-1} \frac{1}{2} t)$ であって、

$$\begin{aligned} |\phi(\cdot, t) - 1|_{\rho(t)} + |\varphi(\cdot, t) - 1|_{\rho(t)} &< \kappa^{-1} 2\epsilon, \\ \|\phi(\cdot, t) - 1\|_{1\rho(t)} + \|\varphi(\cdot, t) - 1\|_{1\rho(t)} &< 2^{\frac{7}{4}} (\kappa 2^{\frac{1}{4}} \epsilon^{-1} - t)^{-1}, \end{aligned}$$

が成り立つ.

この定理の証明は Lax による保存則に関する定理 [44] から導かれる。

今、この定理によって存在が証明された解を ϕ_0 および φ_0 とおく。この時、 s_+ や s_- が十分小さければ、剰余項 D も小さいことが示せるので、そこから剰余項 H_+D と H_-D の評価をして、最後に元の方程式 (15) と (16) に対する解の存在定理を得る。証明は抽象 Cauchy-Kowalewski の定理を用いて行う。

Theorem 3 (Caflisch and Orellana[9]) $0 < \kappa < 1$, $0 < \alpha < 1$, $\bar{\rho} > 0$ とする。 $s(\Gamma, 0)$ が十分小さい ϵ に対して、

$$\sup_{|Im \Gamma| < \bar{\rho}} |s(\Gamma, 0)| + |\partial_\Gamma s(\Gamma, 0)| < \epsilon,$$

を満たすとする。この時、 $z = \Gamma + s$ なる Birkhoff-Rott 方程式の解は $0 \leq t \leq T = \kappa \min(2\bar{\rho}, \epsilon^{-1})$ で存在する。さらに、この s に対応する ϕ と φ は、 $0 < \rho < (\bar{\rho} - \frac{t}{2\kappa})$ なる任意の ρ, t に対して、次を満たす。

$$\|(\varphi - \varphi_0)(\cdot, t)\|_{\alpha\rho} + \|(\phi - \phi_0)(\cdot, t)\|_{\alpha\rho} < C\epsilon^2 \exp\left(-4\left(\bar{\rho} - \frac{t}{2\kappa}\right)\right).$$

ただし、ノルム $\|\cdot\|_{\alpha\rho}$ は次で定義されている。

$$\|\phi\|_{\alpha\rho} = |\phi|_\rho + \sup_{Re y, Re y' < \rho, y \neq y'} \frac{|\phi(y) - \phi(y')|}{|y - y'|^\alpha}.$$

3.3 問題の非適切性

前節のように、解が時間局所的に存在することがわかれば、次はその解が時間大域的に存在するかどうかの問題になる。渦層の問題の本来の目的を考えれば、渦層が長時間発展して複雑化する過程に興味があるのだから、長時間にわたり解が存在し、Birkhoff の予測通り螺旋解への巻き上がりが起こるかどうかを調べるのが重要になってくる。しかし、渦層の螺旋への巻き上がりを捉えようとして行われた多くの数値計算結果 [5, 43, 45, 50, 62, 74, 75, 78, 79] が示していたのは、螺旋への巻き上がりではなく不安定で不規則な渦層の運動であった。その結果、これは渦層が数値計算によって近似できない、つまり解がある時刻で滑らかで無くなるのではないかと推測されるようになった。この問題に数学的な決着がついたのは、Birkhoff の時代から 20 年以上が経過してからで、それによると Birkhoff-Rott 方程式の初期値問題は任意の Sobolev ノルム $H_n (n > \frac{3}{2})$ に対して非適切である。以下に Caflisch[10] らによるその証明の概要を示す。

前節の解の存在証明と同様に、解は奇関数であると仮定する。

$$z(-\Gamma, t) = -z(\Gamma, t).$$

また、Birkhoff-Rott 方程式の線形化方程式の解 s_0 を考える。すなわち、方程式

$$\frac{\partial \bar{s}}{\partial t}(\Gamma, t) = -\frac{1}{2\pi i} \text{pv} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\Gamma + \zeta) - s(\zeta)}{\zeta^2} d\zeta \equiv \frac{1}{2} H[s_\Gamma], \quad (19)$$

の解を考える. ただし, H は Hilbert 変換であり, $H[s_\Gamma] = (\partial_\Gamma s)_+ - (\partial_\Gamma s)_-$ を表している. この方程式の解は存在し, 具体的な解の例として次のようなものがある.

$$s_0(\Gamma, t) = \epsilon(1-i) \left\{ \left(1 - e^{-\frac{t}{2} - i\Gamma}\right)^{1+\nu} - \left(1 - e^{-\frac{t}{2} + i\Gamma}\right)^{1+\nu} \right\}. \quad (20)$$

この解は初期時刻 $t = 0$ において原点近傍で $s_0 \approx C|\Gamma|^{1+\nu}$ となっているので, その二階微分は $z_{\Gamma\Gamma} \approx s_{0\Gamma\Gamma} \approx C|\Gamma|^{\nu-1}$ と表わされることに注意する. すなわち, $0 < \nu < 1$ に対して原点付近で無限曲率を持っている.

この線形化問題の解を使って, 我々は Birkhoff-Rott 方程式の解が次の形をしていると仮定する.

$$z(\Gamma, t) = \Gamma + s_0(\Gamma, t) + r(\Gamma, t).$$

また, 関数空間として次のようなものを考える. ϵ を微小な実数, $1 > \nu > \alpha > 0$, $|\operatorname{Im} \Gamma| < \rho$ で解析的な関数 s に対して, 次の Hölder ノルムを定義する.

$$|s|_\rho = \sup_{|\operatorname{Im} \Gamma| < \rho} |s(\Gamma)| + \sup_{|\operatorname{Im} \Gamma|, |\operatorname{Im} \Gamma'| < \rho, \Gamma \neq \Gamma'} \frac{|s(\Gamma) - s(\Gamma')|}{|\Gamma - \Gamma'|^\alpha}.$$

さらに, s_0 として次の条件を課す.

- (i) s_0 は線形化問題 (19) の解である.
- (ii) s_0 は $t > 0$ に対して, $|\operatorname{Im} \Gamma| < \frac{t}{2}$ で解析的である.
- (iii) s_0 は $t \rightarrow \infty$ で 0 となる.
- (iv) $t = 0$ で s_0 は高々その $(1 + \nu)$ 階微分が特異点を持つ. つまり,

$$\begin{aligned} |s_0|_\rho + |\partial_\Gamma s_0|_\rho &< C\epsilon e^{-(\frac{|t|}{2} - \rho)} \\ |\partial_\Gamma^2 s_0|_\rho &< C\epsilon (1 + (|t| - 2\rho)^{\nu-\alpha-1}) e^{-(\frac{|t|}{2} - \rho)}. \end{aligned}$$

なお, 具体的に与えられた線形化方程式の解 (20) は, この四条件を満たしていることに注意する. この時, 次が成立する.

Theorem 4 (*Caffisch and Orellana[10]*) ϵ を十分小さい実数. $1 > \nu > \alpha > 0$ とする. s_0 を上の (i)-(iv) を満たす関数とする. この時, ある関数 $r(\Gamma, t)$ があって,

$$z(\Gamma, t) = \Gamma + s_0(\Gamma, t) + r(\Gamma, t)$$

は $t > 0$, $\kappa|\operatorname{Im} \Gamma| < t$ (ただし, κ は $\kappa > 2$, $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \kappa = 2$ なるものとする) で, Birkhoff-Rott 方程式の解である. さらに, r は $t = 0$ で $r_+ + ir_- = 0$ なるように選べて,

$$|r|_0 + |\partial_\Gamma r|_0 < C\epsilon^2 \exp\left(-\frac{|t|}{2}\right), \quad (21)$$

$$|\partial_\Gamma^2 r|_0 < C\epsilon^2 (1 + |t|^{\nu-\alpha-1}) \exp\left(-\frac{|t|}{2}\right), \quad (22)$$

となる. ただし, C は ϵ によらず, α^{-1} と $(\nu - \alpha)^{-1}$ にだけ依存する定数である.

この定理を率直に解釈すると, Birkhoff-Rott 方程式には $t > 0$ で解析的であつ $t \rightarrow 0$ で特異になる解の存在が示されている. その意味では, この定理は $t > 0$ における時間大域的解の存在を証明している. 実際, Duchon と Robert[21] もこれと同じ定理を違う証明方法で示しており, それでもって時間大域解の存在の証明としている. しかし, 逆に $t = 0$ で解が滑らかでないということに着目して, 非適切性を示したのが Caffisch と Orellana である. 彼らは z を Birkhoff-Rott 方程式の解とする時, 方程式の対称性から次の三つもその解であることに注目した.

1. $z_b(\Gamma, t) = z^*(\Gamma, -t)$. (時間反転)
2. $z_s(\Gamma, t) = z(\Gamma, t - t_0)$. (時間平行移動)
3. $z_n(\Gamma, t) = n^{-1}z(n\Gamma, nt)$. (スケール不変性)

これより, 時間反転すると, 次の系を得る.

Corollary 1 ϵ, α, ν を Theorem 4 のようにとり, s_0 が $t < 0$ を除いて (i)-(iv) を満たすとする. つまり, s_0 は線形化問題 (19) の解で $t = -\infty$ で 0 となり, $t = 0$ で曲率特異点を持つとする. この時, ある関数 r が存在して, $z(\Gamma, t) = \Gamma + s_0 + r$ は $t < 0$, $\kappa|Im \Gamma| < |t|$ で解析的な Birkhoff-Rott 方程式の解である. さらに, $t = 0$ で $r_+ - ir_- = 0$ で $t = 0$ で (21) と (22) を満たす.

さらに時間をシフトして次の系を得る.

Corollary 2 実 Γ 軸近傍で解析的な, 初期値 $z(\Gamma, 0)$ があって, Birkhoff-Rott 方程式の解 $z(\Gamma, t)$ は有限時間 t_0 でその $(1 + \nu)$ 階微分が無限大となる.

最後に, スケール不変性を用いて次が示される.

Corollary 3 任意の $\epsilon, k > \frac{3}{2}, \nu, \delta$ に対して, $|s_0|_{H^k} < \infty$ なる初期値 $z = \Gamma + s_0$ があって, $\sup |\partial_\Gamma^{1+\nu} z|$ が $t = t_0 < \delta$ で無限大になるようなものがある. 特に Birkhoff-Rott 方程式の初期値問題は H^k ($k > \frac{3}{2}$) で非適切である.

なお, Birkhoff-Rott 方程式の初期値問題の非適切性の証明には, Ebin[22] による次のような定理もある.

Theorem 5 (Ebin[22]) $\eta(t)$ を Birkhoff-Rott 方程式の初期値 $\eta(0)$ に対する解とし, $\{(\zeta_n(0), \dot{\zeta}_n(0))\}$ を C^∞ で $(\eta(0), \dot{\eta}(0))$ に収束する初期関数の列とする. この時, これらの初期値列に対応する解の列 $\{\zeta_n(t)\}$ が存在して, $\zeta_n(t)$ は任意の t に対して, $\eta(t)$ に収束しない.

これによると, 与えられた初期関数に収束する滑らかな近似関数列を構成しても, 時間経過とともに双方の解の差が幾らでも大きくなることがわかる. これも非適切性を主張する定理である.

3.4 Moore の漸近解析と解の漸近形状

前節では Birkhoff-Rott 方程式の初期値問題の非適切性が示されたが, その定理の内容をよく吟味すると, 非適切性を出すために初期値にある種の特異性が仮定されていることに気付く. すなわち, 非適切性の証明の中には初期時刻に複素 Γ 平面上にあった特異点が双曲型方程式の特性曲線によって移動し, 実 Γ 軸に衝突することで解に特異性が現れるというメカニズムが働いているために特異点が生成する. しかし, 我々が問題にしているのは, 滑らかな初期値から始まった解に特異点が発生するのではないかということであり, その真偽はこの定理によって証明されたわけではない. さらに, 解に生じる特異点の構造についても, 初期値の一階微分が少なくとも連続であればいいという仮定の下で成立する定理なので, 初期値の取りかたによっては様々な特異点が発生する可能性がある. しかしながら, 現在では滑らかな初期値から始めた解は有限時間でその曲率, つまり渦層の二階微分が爆発すると多くの研究者は信じている. それは, 以下に示す Moore[53, 54] の Birkhoff-Rott 方程式の漸近解析の結果による. 本節では, この漸近解析について解説する. なお, この漸近解析は Localized Approximation Method[12] として一般化され, 渦層方程式以外の問題にも応用されている.

Moore は次の初期値に対する Birkhoff-Rott 方程式の解を考えた.

$$z(\Gamma, 0) = \Gamma + i\epsilon \sin \Gamma, \quad -\infty < \Gamma < \infty.$$

この初期値に対する解を次の形で書く.

$$z(\Gamma, t) = \Gamma + 2i \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \sin n\Gamma, \quad A_n(0) = \frac{1}{2} \epsilon \delta_{n1}.$$

これを Birkhoff-Rott 方程式に代入して, 次のように変形する.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d\bar{A}_{-n}}{dt} e^{in\Gamma} = -\frac{1}{2\pi i} \text{pv} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{u} \left(1 + \frac{S}{u} + \frac{S^2}{u^2} + \cdots \right). \quad (23)$$

ただし,

$$S(u; \Gamma) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) e^{in\Gamma} (1 - e^{inu})$$

である. ここで (23) の両辺の $e^{in\Gamma}$ の係数を比較すると次を得る.

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{A}_{-n}}{dt} = & -\frac{1}{2\pi i} \left\{ A_n I(n) + \sum_{r_1+r_2=n} A_{r_1} A_{r_2} I(r_1, r_2) + \cdots \right. \\ & \left. \cdots + \sum_{r_1+r_2+\cdots+r_K=n} A_{r_1} A_{r_2} \cdots A_{r_K} I(r_1, r_2, \dots, r_K) + \cdots \right\}. \end{aligned}$$

ただし, $I(r_1, r_2, \dots, r_K)$ は次で定義される積分である.

$$I(r_1, r_2, \dots, r_K) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - e^{ir_1 u} \right) \left(1 - e^{ir_2 u} \right) \cdots \left(1 - e^{ir_K u} \right) u^{(K+1)} du. \quad (24)$$

今、係数 A_n の主要項が $O(\epsilon^{|n|})$ であることに注目し、初期値の対称性から、次のような展開を持つと仮定する。

$$A_n = \epsilon^{|n|} A_{n0} + \epsilon^{|n|+2} A_{n2} + \epsilon^{|n|+4} A_{n4} + \dots$$

この展開を代入して $O(\epsilon^{|n|})$ の部分つまり A_{n0} だけの項をまとめると、方程式 (23) の右辺の r_i はすべて 1 より大きい値の項だけとなる。そのような r_i の組合せに対して、積分 (24) は留数計算より直接計算できて、

$$I(r_1, r_2, \dots, r_K) = \pi(-1)^{K+1} i^{K+1} r_1 r_2 \dots r_K, \quad r_i > 1, \quad (i = 1, \dots, K),$$

となる。その結果、次のような A_{n0} の方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{A}_{-n0}}{dt} = & \frac{1}{2} \left\{ A_{n0}(-i)n + \sum_{r_1+r_2=n} A_{r_10} A_{r_20} (-i)^2 r_1 r_2 + \dots \right. \\ & \left. + \sum_{r_1+r_2+\dots+r_K=n} A_{r_1} A_{r_2} \dots A_{r_K} (-i)^K r_1 r_2 \dots r_K + \dots + A_{10}^n (-i)^n \right\}. \end{aligned}$$

Moore は、この方程式系から係数に関する次の漸近形を得た。

$$\epsilon^n A_{n0} \sim t^{-1} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} (1+i)n^{-\frac{5}{2}} \exp \left\{ n \left(1 + \frac{1}{2}t + \ln \left(\frac{1}{4}\epsilon t \right) \right) \right\}, \quad t \gg 1. \quad (25)$$

この漸近形に対して、もし $1 + t_c + \log t_c = \ln \left(\frac{4}{\epsilon} \right)$ なる t_c があれば、上の漸近展開の \exp 関数の指数が 0 になるので、 $t \approx t_c$ における渦層を表す無限和

$$z(\Gamma, t_c) \sim \Gamma + \sum \epsilon^n A_{n0} e^{in\Gamma} = \Gamma + \sum C n^{-\frac{5}{2}} e^{in\Gamma},$$

(ただし、 C は n によらない定数) の二階微分が爆発する。実際、この係数の漸近形状から計算される z の形は

$$z(\Gamma, t) = \Gamma + \frac{2\sqrt{3}}{3t} (1+i) \left\{ \left(1 - e^{i\Gamma} \epsilon \Theta \right)^{\frac{3}{2}} - \left(1 - e^{-i\Gamma} \epsilon \Theta \right)^{\frac{3}{2}} \right\},$$

である。ここで $\Theta(t) = \frac{1}{4} \exp \left(\frac{1}{2}t + 1 \right)$ なので、 $t \rightarrow t_c$ で $\epsilon \Theta \rightarrow 1$ となり、渦層は原点付近で

$$y = |x|^{\frac{3}{2}}.$$

なる曲線に近づく。さらに、渦層の強さ $\kappa(\Gamma, t)$ は t_c 近傍で次のように書ける。

$$\kappa(\Gamma, t) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{t} \left(t_c - t + ((t_c - t)^2 + 4\Gamma^2)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} + O \left(\frac{1}{t_c} \right).$$

したがって、渦層の強さは $t \rightarrow t_c$ において、原点付近にカスプ形状を構成する。このような特徴付けから、この特異性は $\frac{3}{2}$ -特異性、カスプ特異性 (cusp-singularity)、あるいは曲率特異性 (curvature-singularity) と呼ばれている。

3.5 特異点検出の数値計算

Moore の漸近解析の結果に刺激され、この後、様々な研究者がこの特異性を数値的に検出する追実験を行った。まず、Meiron, Baker & Orszag[49] は、Birkhoff-Rott 方程式の解を時間 t で Taylor 展開したもの

$$z(\Gamma, t) = \Gamma + \sum_{n=1}^{\infty} z_n(\Gamma) t^n$$

を考え、この空間依存係数 $z_n(\Gamma)$ を数値計算で求めた。そして、その係数から無限和の収束半径を計算し、有限時間で解が定義できなくなることを示した。さらに、この展開から Moore タイプの Fourier 級数展開へ変換を行い、その係数の評価から Moore の曲率特異点の存在を支持した。

次いで、Krasny[37] は、渦層の渦点近似 [62] を用いて、Birkhoff-Rott 方程式を初期値

$$z(\Gamma, 0) = \Gamma + \epsilon(1 + i) \sin 2\pi\Gamma$$

のもとで直接数値計算した。この結果について詳しく述べる。まず、時刻 0.3 から 0.38 までの数値解と曲率の様子を図 4 に示す。数値解は一見滑らかに時間発展するが、曲率は時刻 $t = 0.38$ 付近で不連続になっている。図 5 は、この数値解を Fourier 展開して、その係数 $|A_n|$ の様子を両対数プロットしたものである。時間が進むにつれて、高次のフーリエ係数が励起され成長し、曲率特異性が発生する時刻の近傍で、係数はベキ則 $n^{-\frac{5}{2}}$ に従うように見える。このことを確かめるため、Krasny はこの数値的に求めた Fourier 係数から、特異点の発生を検出する Sulem らの数値計算方法 [77] に従って、最小二乗法を用いた関数形

$$|A_n| \sim C(t) n^{-p} \exp(-n\alpha(t))$$

への当てはめを行い、 p と $\alpha(t)$ の大きさを見積もった。なお、この関数形は Moore の解析における、漸近展開の主要項 (25) であることに注意する。図 6 は $\alpha(t)$ の時刻 $t = 0.38$ 直前の様子を示している。 $\alpha(t)$ は時間と共に単調に減少してゆくが、これから α が 0 になる時刻を見積れば、解がその時間で解析性を失うことがわかる。さらに、Krasny は解のフーリエ係数の代数巾の指数 p が $2 < p < 3$ であることも示し、この特異性が曲率の爆発であるということを指摘した。しかし、この数値研究では当時の計算機の能力の限界から、高々千点程度の渦点近似しか扱えず、さらに計算精度も倍精度であったため、代数巾 p の値が Moore の指摘する 2.5 付近になるかを正確に見積もることはできなかった。

これに対して、計算機の性能も飛躍的に発達した 6 年後、Shelley[72] は四倍精度の数値計算と、また Birkhoff-Rott 方程式の特異主値積分を指数関数のオーダーで近似する Sidi と Israeli[73] の数値積分法などを用いて、極めて高精度な Birkhoff-Rott 方程式の数値計算を行った。彼の与えた初期値は次のものである。

$$z(\Gamma, 0) = \Gamma + \epsilon \cos \Gamma.$$

さらに、ここで得られた数値解 $z = (x, y)$ の Fourier 係数 $X_n(t)$, $Y_n(t)$ に当てはめる関数形と

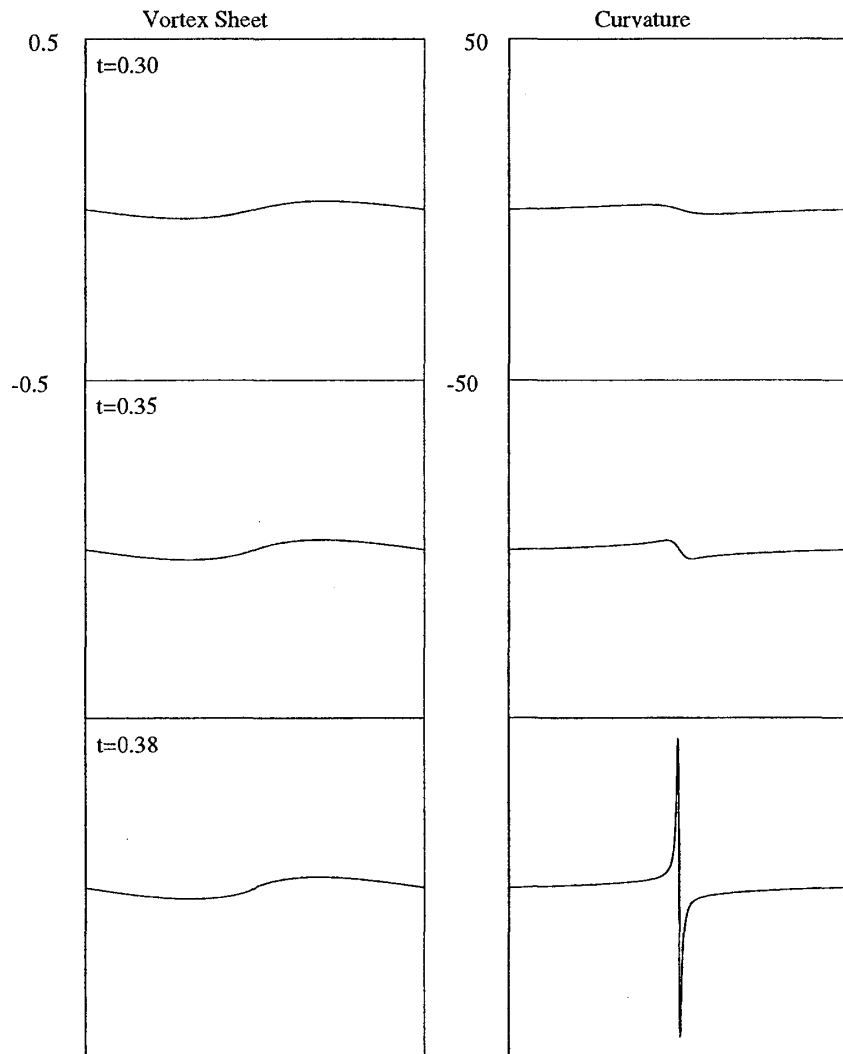


図 4: 時刻 $t = 0.3$ から 0.38 までの Birkhoff-Rott 方程式の数値解とその時刻における渦層の曲率のグラフ. 左側の数値解は一見滑らかなように見えるが, 右側に示すように, その二階微分には不連続性が現れている.

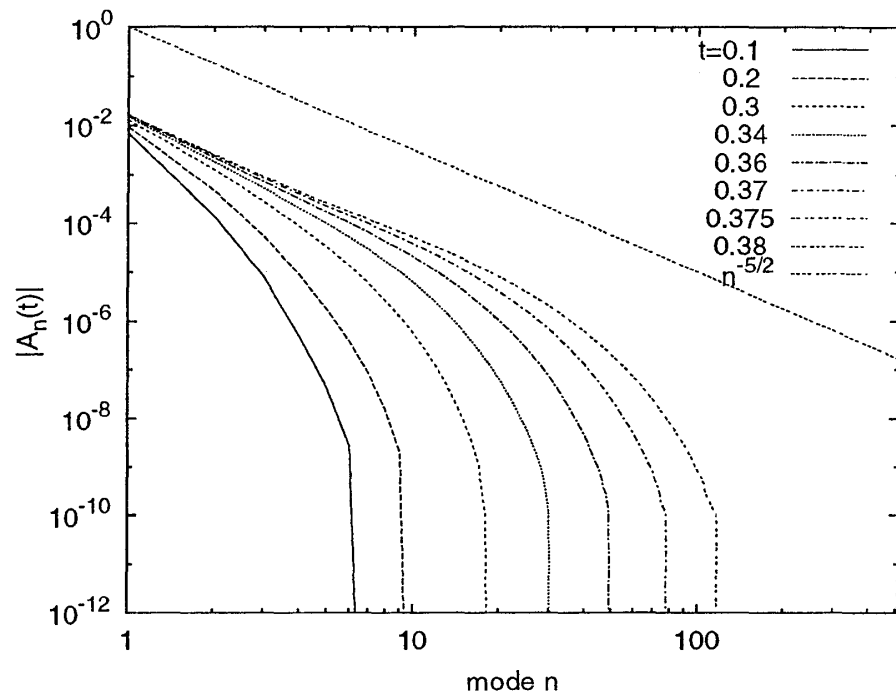


図 5: 各時刻における Birkhoff-Rott 方程式の数値解のフーリエ係数の両対数プロット. 時間が経過すると解のフーリエ係数はべき $n^{-\frac{5}{2}}$ に並ぶ.

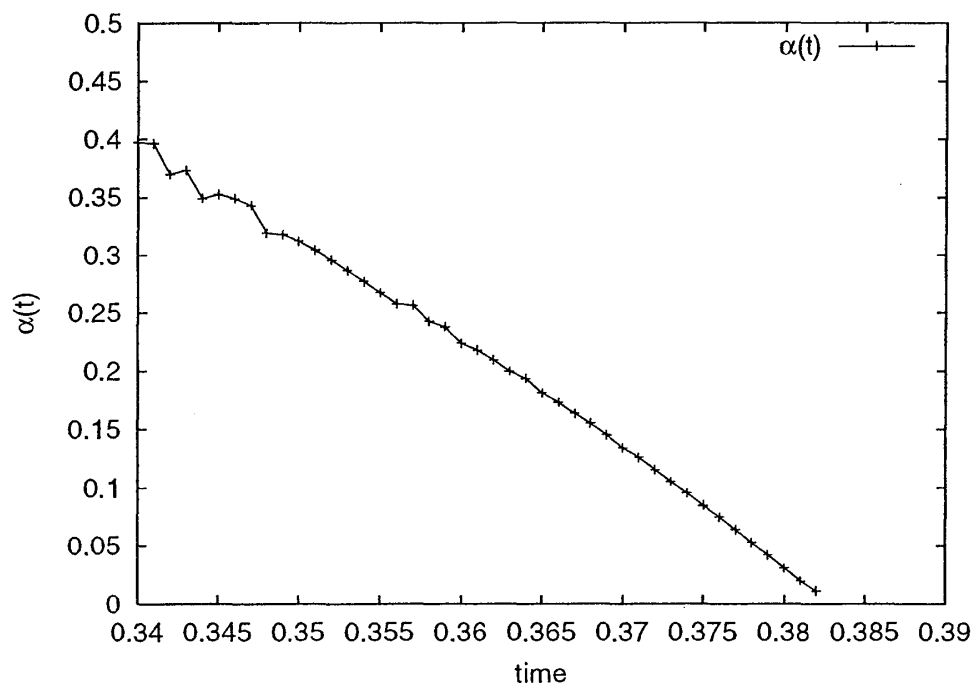


図 6: 数値解のフーリエ係数から最小二乗法で求めた曲率特異点が発生する時刻近傍における係数 $\alpha(t)$ の様子.

して, Moore の漸近形よりも高次の項まで含めた

$$|X_n(t)| \sim C_x n^{-p_x} (1 + D_x n^{-1}) \exp(-n\alpha_x), \quad (26)$$

$$|Y_n(t)| \sim C_y n^{-p_y} (1 + D_y n^{-1}) \exp(-n\alpha_y), \quad (27)$$

なるものを採用した. また, これらの係数を求めるのに, 最小二乗法ではなく, この関係が各 Fourier スペクトルで成立することを要請して計算した. (もちろん, このような計算は精度が高くなければ意味のある結果は得られない.) その結果, Moore の予測したように有限時間で解に滑らかさ失うこと, すなわち $\alpha_x = 0$, $\alpha_y = 0$ となることがわかり, さらに $p_x \sim 2.5$ そして $p_y \sim 3.0$ であることが示された.

Shelley の数値計算は, Moore の曲率特異性が起こるという事実を認めた一方で, 変数 y は Moore の漸近解析とは異なる主要項を持つということを示しており, これは二次元渦層に現れる $\frac{3}{2}$ -特異性の普遍性に疑問を投げかけるものであった. つまり, 非適切性の定理で述べたように, 爆発解として $(1+\nu)$ 階微分以上の特異性を持つ解がすべて発生可能であり, さらに Moore の解析が漸近的にしか成り立たないということを合せて考えれば, Shelley の数値計算の係数が n^{-3} となる解が存在しても別に矛盾するわけではないのである. このことから, $\frac{3}{2}$ -特異性が, 二次元渦層の特異点として普遍的なものであるかどうかという問題が生じた.

解析的な立場からは, この問題に一つの推測を与えたのが Caffisch ら [13, 16] である. 彼らは $\frac{3}{2}$ -特異性がある意味で普遍的なものであることを示している: 彼らの非適切性 [10] の証明では, 初期値が複素 Γ 軸上で特異性を持つと仮定し, それが保存則の特性曲線によって実 Γ 軸に衝突することで, 特異性が発生するというシナリオが描かれていたが, 初期値の特異性には任意性があった. それに対して彼らは, 数ある特異性のうち最も速く実 Γ 軸に顕在化する特異性が $\frac{3}{2}$ -特異性であることを示した. しかし, この議論でも依然初期値において複素 Γ 平面に特異性が仮定されているので, 滑らかな初期値から $\frac{3}{2}$ -特異性が選択的に現れるのかどうかに答えているわけではない.

また数値的な立場からは, Cowley ら [20] が一つの答えを出している. 彼らは, 複素 Γ 平面での特異点の動きを追跡する数値計算法を提案し, これまでに試みられた Moore[53], Krasny[37] そして Shelley[72] の各初期値に対して, それを応用した. その結果, Shelley の初期値だけが, y 変数の $n^{-\frac{5}{2}}$ の主要項の係数が 0 になる特別な初期値に相当していることがわかり, Shelley の見つけた y 変数にの n^{-3} の特異性は特別な初期値にのみ発生すると結論した. この結果は, Moore の $\frac{3}{2}$ 特異性の普遍性を認めるものである.

3.6 渦層の Roll-up 解

3.6.1 自己相似解と二重螺旋解

これまでに解説してきた渦層の特異点生成に関する研究の流れとは別に Birkhoff-Rott 方程式の螺旋形をした解を求める研究がある. 古くは飛行機の翼の後にできる流れの構造を渦層近似によって記述する Kaden 螺旋 [33] の研究があり, この話題について, その後多くの数値的・解析的な結果 [4, 24, 25, 26, 43, 45, 50, 52, 59, 62, 74, 75, 78, 79] が得られている. その概要

は Saffman[64] を参照してもらうこととして、ここでは主に滑らかな渦層の巻き上がりについて考えるため、Kaden 螺旋の一般化としての Prandtl[58] の自己相似的な渦層の研究について簡単に触れる。

自己相似解とは次のような形をした解のことである。

$$z = t^m f(\theta) e^{i\theta}, \quad \Gamma = t^n g(\theta) e^{i\theta}.$$

この式を Birkhoff-Rott 方程式に代入して、各パラメータの関係を定めることができるが、その取扱いの詳細については再び Saffman[64] を参照してほしい。この自己相似解は単螺旋を表しているが、Alexander[2] は N 重螺旋型自己相似解への拡張を行った。

$$z_p = t^m f(\theta) e^{i(\theta + \frac{2\pi(p-1)}{N})}, \quad 1 \leq p \leq N.$$

この N 重自己相似解の特別な場合としての二重螺旋解は Birkhoff-Rott 方程式の解の巻き上がりを知る上で重要な解であり、解析・数値の両面から研究が行われている。Kaneda[34] は自己相似な二重螺旋解を Birkhoff-Rott 方程式から解析的に構成している。また、Pullin[61] は Birkhoff-Rott 方程式数値計算を通じて二重螺旋解の構成を行っている。しかし、いずれの解も螺旋の中心で特異性を持つ螺旋である。なお、近年では螺旋形をした Birkhoff-Rott 方程式の解の存在について、Wu[80] が関数解析的な研究成果をサーベイしている。

3.6.2 渦法による正則化と滑らかな二重螺旋解

前節のように Birkhoff-Rott 方程式には二重螺旋形をした自己相似解が存在するが、このような解には螺旋の中心に特異点があるので滑らかな解ではない。また、はじめから解に螺旋形を仮定しているので、滑らかで平坦な渦層が時間発展とともにこうした螺旋へ変形するかという問題には答えているわけではない。一方で Moore の漸近解析が示していることは、滑らかな初期値に対する Birkhoff-Rott 方程式の解は有限時間で爆発するので、時間大域的な解析的な解は存在しないということであり、さらに、図 4 の数値解が示しているように、曲率が爆発する直前の渦層は大変形をとまなっていない。これらの事実から、滑らかな初期値から滑らかな螺旋解への巻き上がりは起こらず、その意味では Birkhoff の予測は外れたことになる。

しかしながら、渦層が巻き上がらないかと言えば、そうとも言えない。つまり、前節で述べたような中心に特異性を持つ二重螺旋型自己相似解は存在するので、滑らかな初期値に対する Birkhoff-Rott 方程式の解として、曲率特異点が生成した後にこうした中心特異点を持つ螺旋解へ接続できる可能性は排除できない。こういう事情を背景に、1980 年代に入って Birkhoff-Rott 方程式を何らかの方法で非特異化 (正則化) して、その解を研究し、その極限から元の方程式の解の何らかの情報を得るという方向での研究が進められるようになった。

さて、一言で方程式を正則化と言っても、その方法には様々な方法がある。最も自然な正則化は、粘性を考慮した Navier-Stokes 方程式の δ 関数的な初期値を与えることだが、Euler 方程式と違い渦度が粘性項によって拡散するため、これまでのように渦層を一つの面として扱うことができなくなる。そこで、Euler 方程式の枠組での正則化の方法を考える必要がある。一つは渦層の幅を有限幅にして、その中に一定渦度が分布していると仮定した渦膜 (vortex layer)

の運動を考えることができる。この方程式の導出と数値計算は Baker と Shelley[3] によって行われている。もう一つは渦層に表面張力の効果を導入するものであるが、この数値計算も Hou ら [27] によって行われている。しかし、これらの物理的な正則化では Birkhoff-Rott 方程式の二重螺旋解と曲率爆発する解との関係を数理的な視点から明らかにするのは難しい。そこで、この節では Chorin[19] によって導入された“渦法”と呼ばれる正則化手法による Krasny[38] の研究を紹介する。

彼は Birkhoff-Rott 方程式を渦法によって正則化して、その数値計算を行った。すなわち、周期 1 の周期境界条件 (12) を考えて、ある人工的なパラメータ $\delta > 0$ を使って、渦層の位置 $(x(\Gamma, t), y(\Gamma, t))$ に対する以下のような正則化方程式を考えた。

$$\frac{\partial x}{\partial t}(\Gamma, t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\sinh 2\pi(y - \tilde{y})}{\cosh 2\pi(y - \tilde{y}) - \cos 2\pi(x - \tilde{x}) + \delta^2} d\Gamma', \quad (28)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(\Gamma, t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\sin 2\pi(x - \tilde{x})}{\cosh 2\pi(y - \tilde{y}) - \cos 2\pi(x - \tilde{x}) + \delta^2} d\Gamma'. \quad (29)$$

なお、ここでは渦度密度は $\gamma(\Gamma) \equiv 1$ にとっている。このパラメータを $\delta = 0$ とした時、この方程式は Birkhoff-Rott 方程式 (13) に一致することに注意する。

渦法による非特異化 Birkhoff-Rott 方程式 (28) と (29) を研究する場合、この非特異化方程式の解が $\delta \rightarrow 0$ で元の方程式の解にどのように近づくかに興味がある。これに対して、解析的には Birkhoff-Rott 方程式の解が滑らかであれば、正則化方程式の解は元の解に一樣収束することが知られている [11]。また、Birkhoff-Rott 方程式の解に滑らかさが無い場合でも、ある弱い意味 (測度値解) での収束性が時間大域的に示されている [47, 48]。したがって、この正則化方程式の解は弱い意味で Birkhoff-Rott 方程式の解を近似している。

さて、正則化方程式の右辺の積分は有界なので、この方程式の解はずっと滑らかとなり、数値計算を安定にすすめることができる。そこで、積分の離散化には台形公式を、時間方向の積分には四次の陽的 Runge-Kutta 法を用いて数値計算を行う。図 7 は $\delta = 0.1$ の時の正則化方程式の数値解を示しており、解は時刻 $t = 0.6$ あたりから滑らかに二重螺旋形に巻き上がっている。この時、 δ の効果により、もとの Birkhoff-Rott 方程式で見られた曲率の爆発は起こっていないことに注意する。次に、この渦巻き構造が $\delta \rightarrow 0$ でどのように変化するかを調べる。図 8 は各 δ に対する、時刻 $t = 1$ での数値解の様子を示したものである。ともに二重螺旋構造を持っているが、 δ が小さくなるにつれて、螺旋の中心付近ではきつく巻き付いていることがわかる。Krasny は $\delta \rightarrow 0$ の時の数値解の様子から、螺旋の中心の近傍では螺旋の間隔が指数螺旋的になっていると指摘している。しかし、一方で螺旋の中心での曲線の性質や、Birkhoff-Rott 方程式の曲率特異点生成後の解との関連については詳しく調べられていない。この話題については、§4 で詳述する。

さて、渦法による渦層方程式の正則化は解の二重螺旋構造への巻き上がりという当初 Birkhoff が予測した現象を発生させ、また直接 Navier-Stokes 方程式を計算する手間に比べて簡便である。そうしたことから Birkhoff-Rott 方程式の数理的な問題とは関係なく、様々な渦層流れの数値計算に応用されている。例えば [30, 39, 40, 56, 65, 67] などをあげておく。また、多くの研究によってその計算結果の妥当性も研究されている [7, 23, 63]。実際、正則化パラメータ δ の効果は、粗っぽく言うと解のフーリエ空間において、高次のスペクトルの成長を抑えるよう

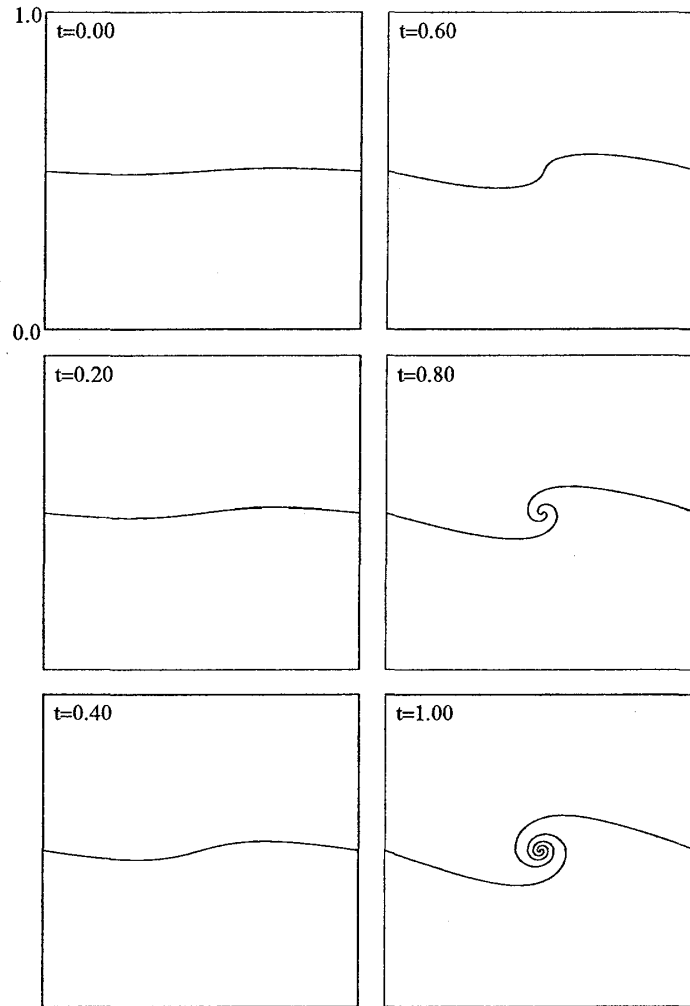


図 7: $\delta = 0.1$ の時の正則化方程式 (28) と (29) の時刻 $t = 0$ から $t = 1$ までの数値解

なものであり, 渦法による正則化を行った Birkhoff-Rott 方程式の解が, 非常に粘性の小さな流体の挙動をよく近似していると考えerことは妥当であろう. 実際, Nitsche と Krasny[56] は実験室で観測されたある流体现象と正則化 Birkhoff-Rott 方程式の数値解を詳細に比較して, それがよい近似を与えていることを示している.

また, この近似の仮定に基づいて, 渦法による正則化方程式を用いた二重螺旋解の長時間発展も調べられている. 図 9 は筆者らが計算した周期境界条件を持つ渦層の長時間発展 $t = 10$ から $t = 11.5$ までの様子である [66]. 図では二周期分の渦層の様子がプロットされているが, 渦は螺旋の中心で巻き上る一方で, 渦層の一部が引き延されて細長いフィラメントとなり左右の領域へ侵入している様子がわかる. 螺旋中心へ集中する渦層領域と渦フィラメントとなって左右への拡散していく渦層領域は間欠的に存在しており極めて複雑な構造を作る.

なお, 二次元渦層の長時間発展については, Krasny と Nitsche[42] による数値計算もある. それによると渦層が長時間発展するとホモクリニックカオスが発生することが示唆されている.

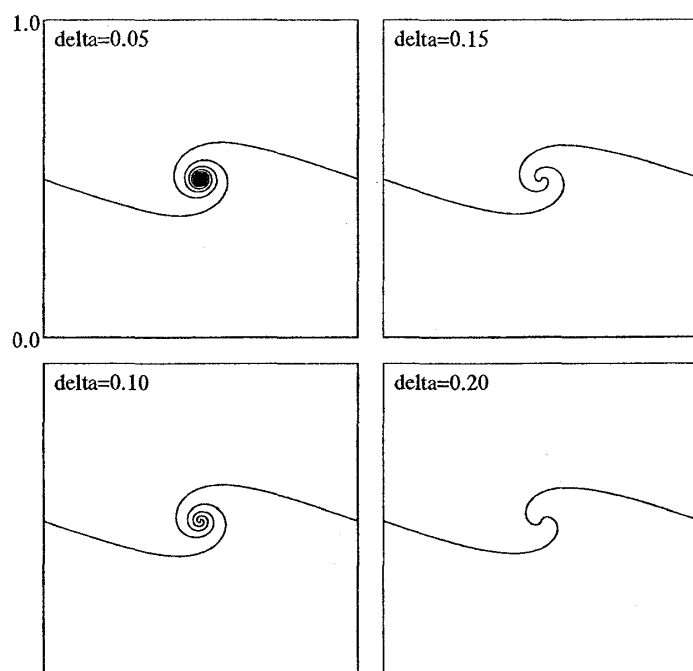


図 8: 正則化パラメータを $\delta = 0.05, 0.1, 0.15$ および 0.2 の時の時刻 $t = 1$ における正則化方程式 (28) と (29) の数値解

また、その他にも近年、この二重螺旋解の安定性なども数値的に調べられている [1].

4 渦層の巻き上がりと複素時間特異点

§3.6.2 で触れたように渦法による正則化方程式の二重螺旋解は元の方程式の弱解の一つと考えることができる. しかし、この解の意味はあまりにも弱いので、具体的な解、特に数値計算で確かめられた二重螺旋解という物理的に妥当性を持つ解の意味付けを与えてくれるわけではない. また、正則化方程式の解はずっと滑らかな一方で、Birkhoff-Rott 方程式は正則性を失うといった具合に両方程式の解の正則性に大きなギャップがあるため、逆に解析関数の範疇では、その意味が強すぎて、二重螺旋解を解として認めることができない. 数値的には Krasny が非特異化方程式の二重螺旋解の形状から、 $\delta \rightarrow 0$ での漸近的な螺旋解の形状を推定してはいるが、この方法では元の方程式の特異点と二重螺旋解の関係についての情報が得られない. そこで、この節において、我々はある別の視点から、この特異点と二重螺旋解の関係を調べる. その視点とは、方程式の定義される時間変数を複素数と考えることである.

これについて、もう少し詳しく説明する. 今、時間を複素数に拡張した時、時間発展方程式の解を求めるとは、実時間軸に沿って速度場関数を積分することに相当する. また、解に有限時間で特異性が生じるとは、ある実時間軸上の点 $(t^*, 0)$ があって、解の実時間経路に沿った解析接続がその点で不可能になるということを意味する. 逆に、この方程式を非特異化した方程式



図 9: 正則化パラメータを $\delta = 0.1$ の時の渦層の長時間発展 $t = 10$ から 11.5 の様子

の解が滑らかであり続けるということは実時間軸に沿った解が いつまでも解析接続によって定義可能であることを意味している。

一方で, たとえ非特異化方程式の解が実時間に沿って解析接続できるとしても, その積分経路 (解析接続の経路) を複素時間平面上で様々に変えた時, その正則性が保たれるわけではない. したがって, いろいろ積分経路を変えて積分をすれば, 複素時間平面内に特異点の集合が得られる可能性がある. このような特異点の集合を調べて $\delta \neq 0$ の時の特異点の分布 (この分布はもちろん実時間軸と交わりを持たない) と $\delta = 0$ の時の分布を調べれば, Birkhoff-Rott 方程式とその非特異化方程式の解の (実時間での) 正則性についての性質の違いを統一的に理解できるに違いない.

そこで, 本章では, このアイデアに従って筆者が行った研究 [70] を解説する. この論文では, Birkhoff-Rott 方程式の非特異化方程式, (28) と (29) の複素時間特異点の分布を数値的に調べ, $\delta \rightarrow 0$ なる時に, その分布の挙動がどのようになるかを論じ. さらに, この非特異化方程式の二重螺旋解の巻き上がり運動の数値モデルを導入とその解析を通じて, 数値計算結果の解釈と特異点生成後の Birkhoff-Rott 方程式における二重螺旋解の性質を考察する.

4.1 複素時間特異点を検出する数値計算法

正則化方程式の特異点の検出には, §3.5 で紹介した Shelley の高精度数値計算法を採用する. しかし, 我々の目的は単に実時間上での Moore タイプの特異点を調べるだけでなく, $\delta \neq 0$ の時に複素時間平面全体での特異点分布を調べることにあるため, 計算法の拡張が必要である. すなわち,

- 時間積分の経路の複素平面への拡張,
- Birkhoff-Rott 方程式の各変数 $x(\Gamma, t), y(\Gamma, t)$ の複素数への拡張.

この時, 具体的な特異点検出アルゴリズムは以下ようになる.

- (前準備) 時間の積分経路を定める
- (前準備) x, y を複素数に拡張して得られる拡張 Birkhoff-Rott 方程式を考える.
- 渦法を用いて拡張 Birkhoff-Rott 方程式の右辺の特異積分を非特異化し, それを n 点の台形則で離散化
- 時間方向の積分は複素積分経路上の四段四次 Runge-Kutta 法を用いる.
- Runge-Kutta 法を一ステップ進めるたびに変数 x, y を Γ に対する離散フーリエ級数に展開する.

$$x(\Gamma, t) = \Gamma + \sum_{k=-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}-1} X_k(t) \exp(2\pi i k \Gamma), \quad (30)$$

$$y(\Gamma, t) = \sum_{k=-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}-1} Y_k(t) \exp(2\pi i k \Gamma). \quad (31)$$

この X_k, Y_k の Moore の漸近形 (26) と (27) へのあてはめにより, 仮定される $\alpha_x(t)$ や $\alpha_y(t)$ を算出する.

このように計算を繰り返し最終的に $\alpha_x(t)$ および $\alpha_y(t)$ が極めて 0 に近くなった時 (今回の計算では, その絶対値が 1.0×10^{-3} を下回った時) に計算をうちきり, 後は補外によって, それぞれが 0 になる特異点発生時刻を推定する.

ここで, 若干の注意をしておく. 本来, 渦法によって非特異化パラメータ δ を導入すると, 数値計算を安定にすすめることができるはずである. しかし, 今回のように時間を複素数に拡張した場合にはこの非特異化パラメータの効果が意味を持たなくなる. つまり Kelvin-Helmholtz 不安定性のため, 数値計算により発生した微少な丸め誤差が急激に成長し, 解が数値的に不安定になる. そこで, 数値計算の丸め誤差の成長を抑えるために, Krasny の Fourier-Filtering 技法 [37] を使って, 丸め誤差による数値解への悪影響を抑えながら数値計算を進めた. つまり, 毎時間ステップにおいて, 解のフーリエ級数展開を行い, そのフーリエ係数の大きさが予め与えられた閾値より小さい場合, その係数を 0 にリセットするのである. 実際, このような filtering は渦層方程式の特異点の検出に効果があることが Caffisch [18] によって示されている. なお今回の数値計算では, 四倍精度浮動小数点の演算を行っているので filtering の閾値は 1.0×10^{-18} にとっている.

最後に本計算では以下の Krasny の用いた初期値で数値計算を行った.

$$\operatorname{Re} x(\Gamma, 0) = \Gamma + 0.01 \sin 2\pi\Gamma,$$

$$\operatorname{Re} y(\Gamma, 0) = 0.01 \sin 2\pi\Gamma.$$

ただし, 変数 x と y ともに, その初期における虚部には摂動を加えず, 0 から始めている.

4.2 非特異化パラメータ $\delta = 0.1$ の時

非特異化パラメータ δ の値が 0.1 の時の複素特異点の分布を図 10 に示す. 複素時間特異点は図中に現れる曲線の上に連続的に分布している. まず, この曲線を超えて, それによって囲まれる領域内に解を解析接続によって定義できないことに注意する, なぜなら原点から始まる任意の経路は必ずこの曲線と交わり, そこで解に特異性が現れるからである. 次に, この分布の様子を観察すると, $\operatorname{Re} t > 0.6$ あたりで, 複素時間特異点は実時間軸を挟むように存在している. これは実時間の上に特異点が存在せず, 実時間を経路にする解析接続によって解が定義できることを意味している. 渦法による数値計算が安定に進められるのはこのためである.

さて, 複素時間特異点によって挟まれた細い領域は虚時間の方向に周期的な「帯領域」を構成していることがわかる. さらに, この特異点の実時間方向の分布の様子を観察するために, 実時間領域 $\operatorname{Re} t > 0.6$ での特異点の分布の様子を拡大して図 11 に示す. この図に示されているように, 複素時間特異点は実軸方向にも周期的に分布している. また, 他の帯領域においても, 複素時間特異点は実時間方向に周期的に分布している様子が確認されるので, $\operatorname{Re} t > 0.6$ の領域において, 複素時間特異点は実および虚時間の二方向に周期的に分布していることがわかる.

この二重周期的な帯領域構造と方程式の解の関係を調べる. 図 12 は積分経路を実時間軸に取った時の数値解の様子 (左側) とその時の積分経路の位置 (右側) を示している. これによれ

ば、積分経路が二重周期的帯構造の中に侵入すると渦層が二重螺旋に巻き上がることがわかる。また、他の帯構造に積分経路が侵入するようにとって数値計算をした場合も同様に、積分経路が帯領域に入り込むと同時に渦層は二重螺旋に巻き上がることが観察される。したがって、二重螺旋の巻き上がり運動と二重周期的な複素時間特異点の帯構造には何らかの関係があることを数値計算は示唆している。この事実は後節において、巻き上がる二重螺旋運動の簡単な数理モデルの数学解析によって説明を試みるが、その前に $\delta \rightarrow 0$ の時の複素特異点の振舞いを次節で調べる。

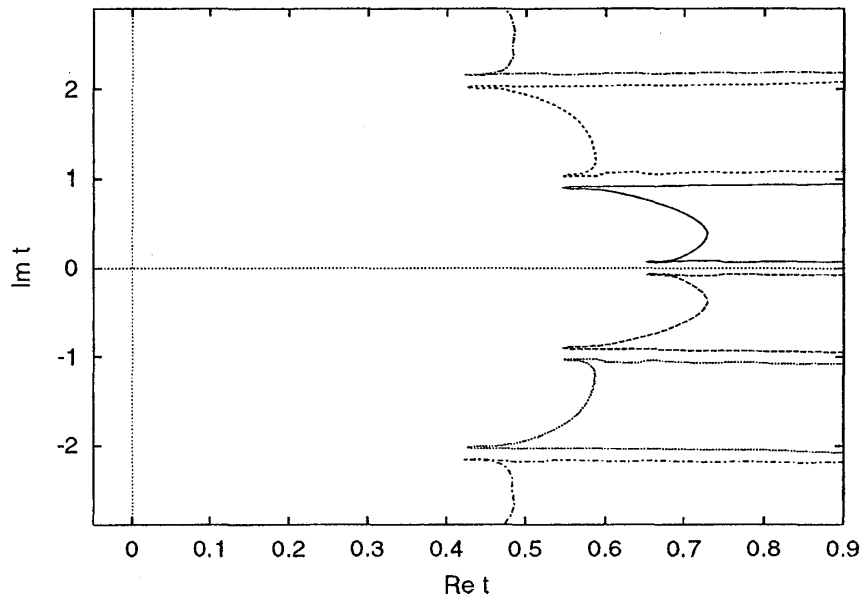


図 10: $\delta = 0.1$ の時の複素時間特異点の分布の様子。特異点は各曲線上に連続的に分布している。

4.3 非特異化パラメータ $\delta \rightarrow 0$ の時

ここでは、非特異化パラメータ δ が 0 に近づく時の複素時間特異点の分布の振舞いについて述べる。図 13 は $\delta = 0.05, 0.075, 0.1$ の時の複素時間特異点の様子を示している。二重周期的な特異点の帯構造などは同じく観察されるが、全体的に分布が左側に移動し、二つの特異点境界に挟まれた帯領域の大きさそのものが狭くなっている。このことをもう少し詳しく見るため、特異点の中で実時間に最も近い点、これは図 14 にあるように帯領域の入口の先端にある点であるが、に注目して、その δ 依存性を調べる。

図 15 はこの実時間軸に最も近い点の様子を各 δ に対してプロットしたものである。複素時間特異点の分布は実時間軸に対して対称なので、ここではその二点をプロットしてある。この図によると、 δ が 0 になるにつれて、これらの二点は徐々に実時間軸に近付き、そして最終的には Birkhoff-Rott 方程式で予測されている実時間特異点で衝突する。これらの二点が帯領域の先端部にあることを考慮すると、この実時間軸上における衝突により帯状領域への入口が塞が

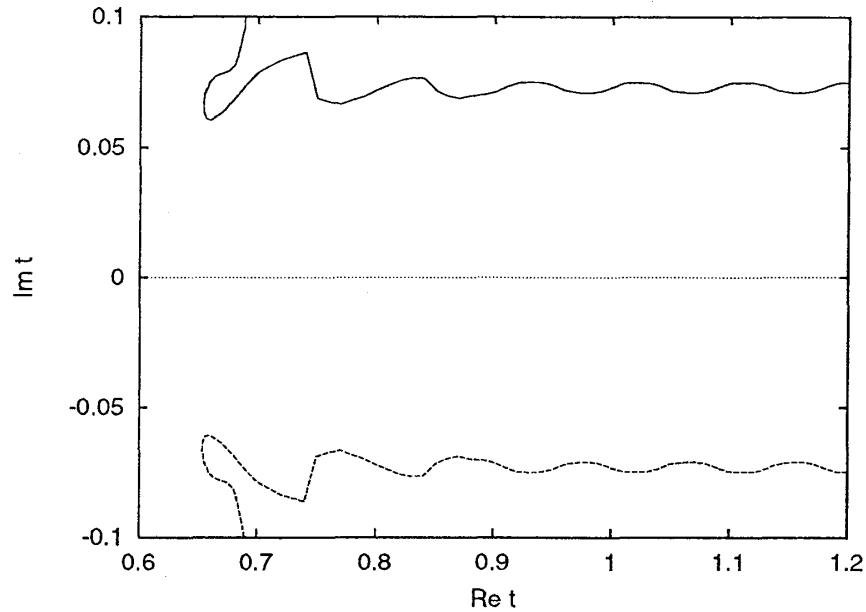


図 11: $\delta = 0.1$ の時の実時間 $\text{Re } t > 0.6$ の複素時間上半平面領域での複素時間特異点の分布. 実時間方向に特異点の周期的な分布が見られる.

れてしまうことを意味している. したがって, Birkhoff-Rott 方程式の解は実時間軸の上でこの衝突点を超えて帯領域の中に解析接続することができず, よって帯領域と関係のある二重螺旋解が現れてこない. さらに, 他の帯領域の入口が δ の減少と共に狭くなっていく様子も観察されるので, いかなる積分経路をとろうとも, Birkhoff-Rott 方程式の解の正則領域として二重周期的な帯領域を含めることができない. この結果から, 非特異化方程式と Birkhoff-Rott 方程式の実時間上での解の正則性に関する違いと言うのは複素時間特異点の観点からみれば, 二重周期的な帯構造をした分布の入口の閉塞という形で把握できることがわかる.

なお, これらの帯領域の入口が塞がれた時に, その向こう側で帯領域がどうなっているかはわからないことに注意する. つまり, もし特異点の衝突点が高々一点程度のものであれば, 特異点の帯領域が残っている可能性があり, そうなれば何らかの意味で二重螺旋を Birkhoff-Rott 方程式の解として定義できるかもしれない. しかし, 後述する数値モデルとの比較によれば, 特異点の衝突時の構造はかなり複雑な様相をしているために単純な帯構造が残っているとは言えない.

4.4 二重螺旋巻き上がり運動の数学モデル

これまでの数値計算結果を説明するために, 簡単な巻き上がり渦層運動の数値モデルを導入する. このモデルは非特異化された渦層の長時間発展, つまり巻き上がる二重螺旋解の考察に基づいている. すなわち長時間発展をするにつれて, 初期において一様であった渦密度が渦層の巻き上がりとともに, 徐々に螺旋の中心に集中し, そこに大きな渦密度領域を構成するということである. このことから, モデルとして最初から渦度が二重螺旋の中心にのみ渦点として存在

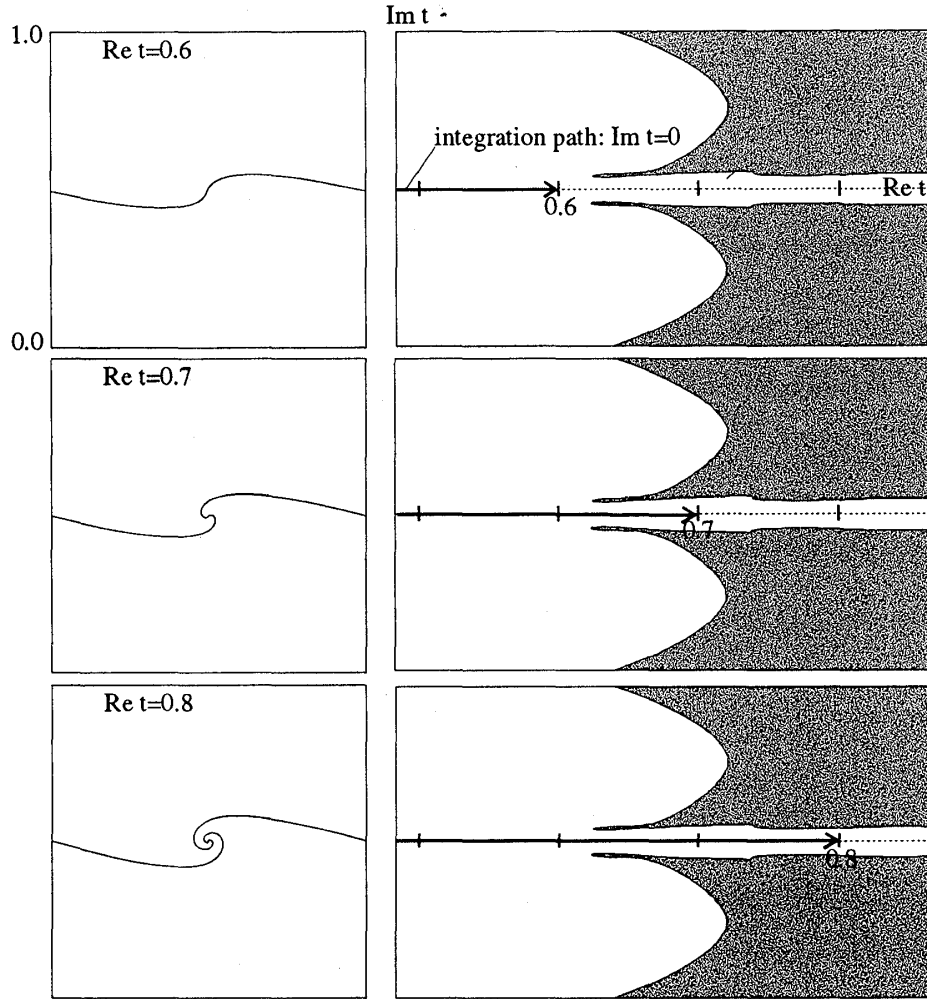


図 12: 積分経路を実時間の上にとった時の、数値解の様子 (左側) と、その時の積分経路の位置 (右側). 積分経路が帯領域に入ると、渦層は二重螺旋に巻上がる.

し、その他の領域はさほど影響のないものとして、passive scalar の集まりが渦層状に一様分布しているようなものを考える. もちろん、前述の渦層運動と同じ周期境界条件を課しているので、実際に渦糸は x 軸方向に無限個あって、それぞれの渦糸の間を passive scalar が結ぶような状況になっている. この時、それぞれの渦糸は位置を変えず、巻上がりの中心に留まったままである. 一方、passive scalar はこれらの渦点によって誘導される速度場によって流される. 具体的には位置 $(x(\Gamma, t), y(\Gamma, t))$ (ここにおける Γ は passive scalar の分布している曲線の位置パラメータを表す.) にある passive scalar は次の方程式にしたがって運動する.

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{\sinh 2\pi y}{\cosh 2\pi y - \cos 2\pi x + \delta^2}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\sin 2\pi x}{\cosh 2\pi y - \cos 2\pi x + \delta^2}, \quad (32)$$

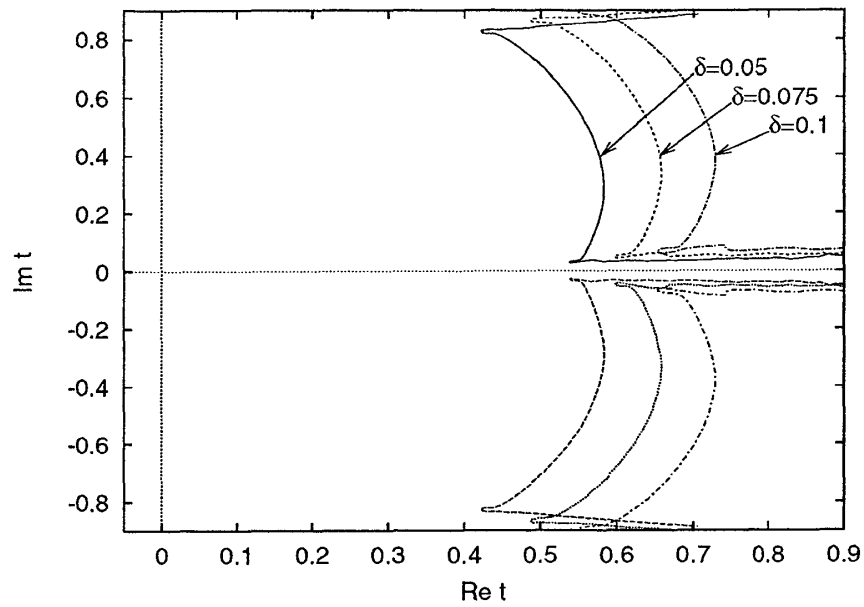


図 13: $\delta = 0.05, 0.075, 0.1$ の時の複素時間特異点の分布の様子.

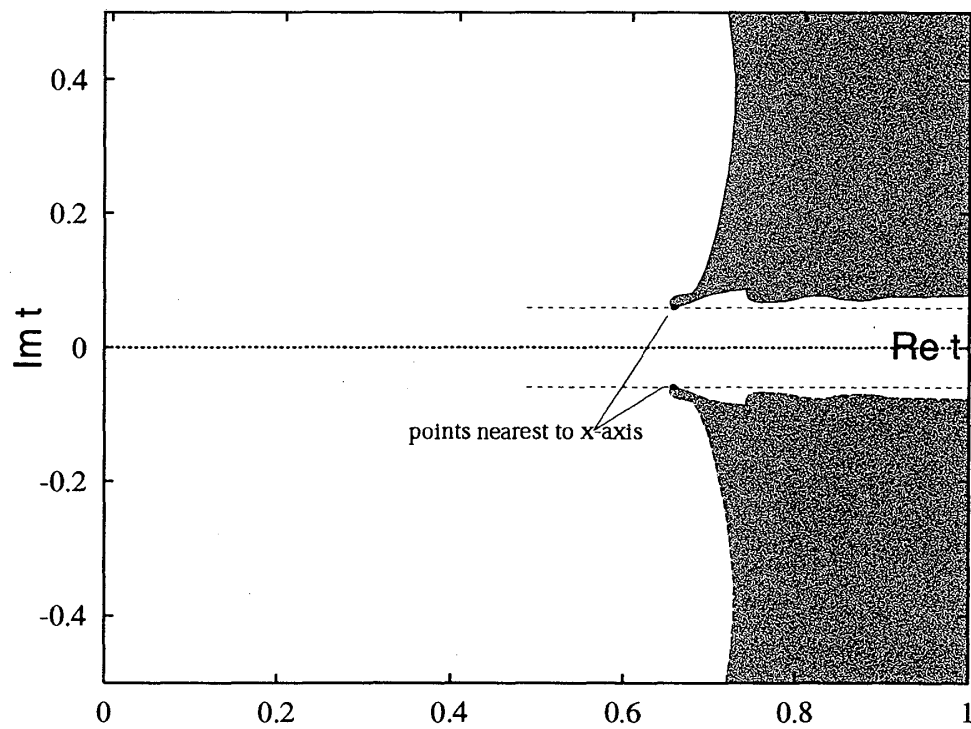


図 14: 実時間軸に最も近い点の位置. これらの点は, 帯状領域の入口にある.

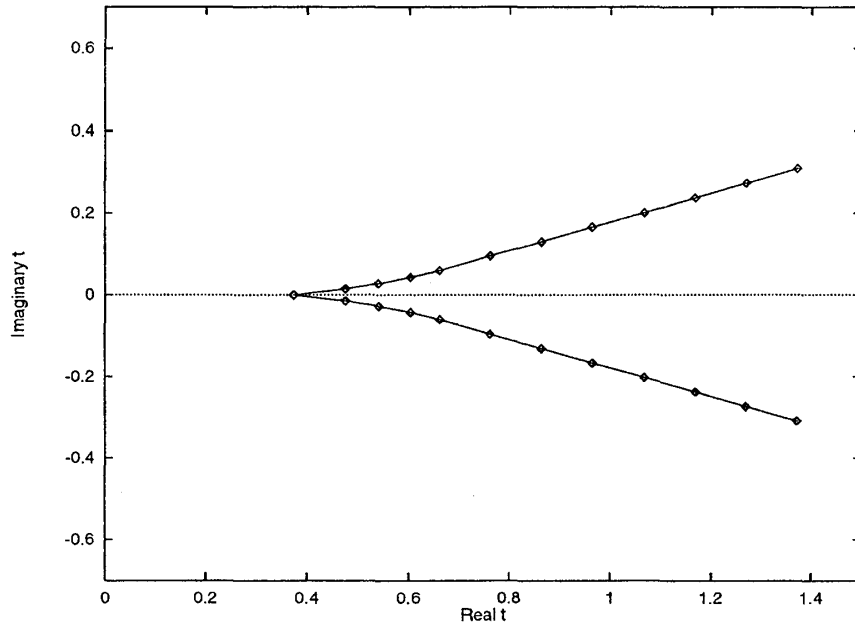


図 15: 各 δ に対する, 実時間軸に最も近い複素時間特異点の位置. 右から $\delta = 0.45, 0.4, 0.35, 0.3, 0.25, 0.2, 0.15, 0.1, 0.05, 0.025$.

ただし, 方程式は Birkhoff-Rott 方程式と同様に渦法によって非特異化されていることに注意する. 今, 初期時刻において passive scalar は x 軸上に分布しているものとする.

$$x(\Gamma, 0) = -0.5 + \Gamma, \quad y(\Gamma, 0) = 0.0, \quad (0 \leq \Gamma < 1, \Gamma \neq 0.5). \quad (33)$$

ここで, 渦点の存在する位置には passive scalar がないようにするため, $\Gamma = 0.5$ を除外している.

この方程式による, passive scalar の運動の様子を図 16 に示す. 左側が非特異化方程式の解 ($\delta = 0.3$) であり右側が非特異化モデル方程式の解 ($\delta = 0.6$) である. これら二つの時間発展を比べて見ればわかるように, 両方程式の解は螺旋の巻数と, その発展速度が非常に似ている. このモデルを考えるメリットはこうした視覚的な相似性だけではない. 実はこの方程式は厳密に解けるのである. 方程式 (32) の右辺の分母は時間によらない不変量であることは方程式からすぐにわかる. これを $K_\delta(\Gamma)$ と表す.

$$K_\delta(\Gamma, t) = K_\delta(\Gamma, 0) = 2(1 + \cos 2\pi\Gamma + \delta^2) \equiv K_\delta(\Gamma).$$

次に時間と空間の変数を $\tau = \frac{t}{K_\delta(\Gamma)}$, $X = \sin 2\pi x$, $Y = \cos 2\pi x$, $P = \sinh 2\pi y$ and $Q = \cosh 2\pi y$ のように変数変換して, 方程式を書き換えると次のようになる.

$$\frac{dY}{d\tau} = XP, \quad \frac{dQ}{d\tau} = XP. \quad (34)$$

ただし, 各変数の初期条件は, それぞれ $X(\Gamma, 0) = -\sin 2\pi\Gamma$, $Y(\Gamma, 0) = -\cos 2\pi\Gamma$, $P(\Gamma, 0) = 0.0$, $Q(\Gamma, 0) = 1.0$ となっている. この二つの方程式から $Y - Q$ は時間によらない変数である

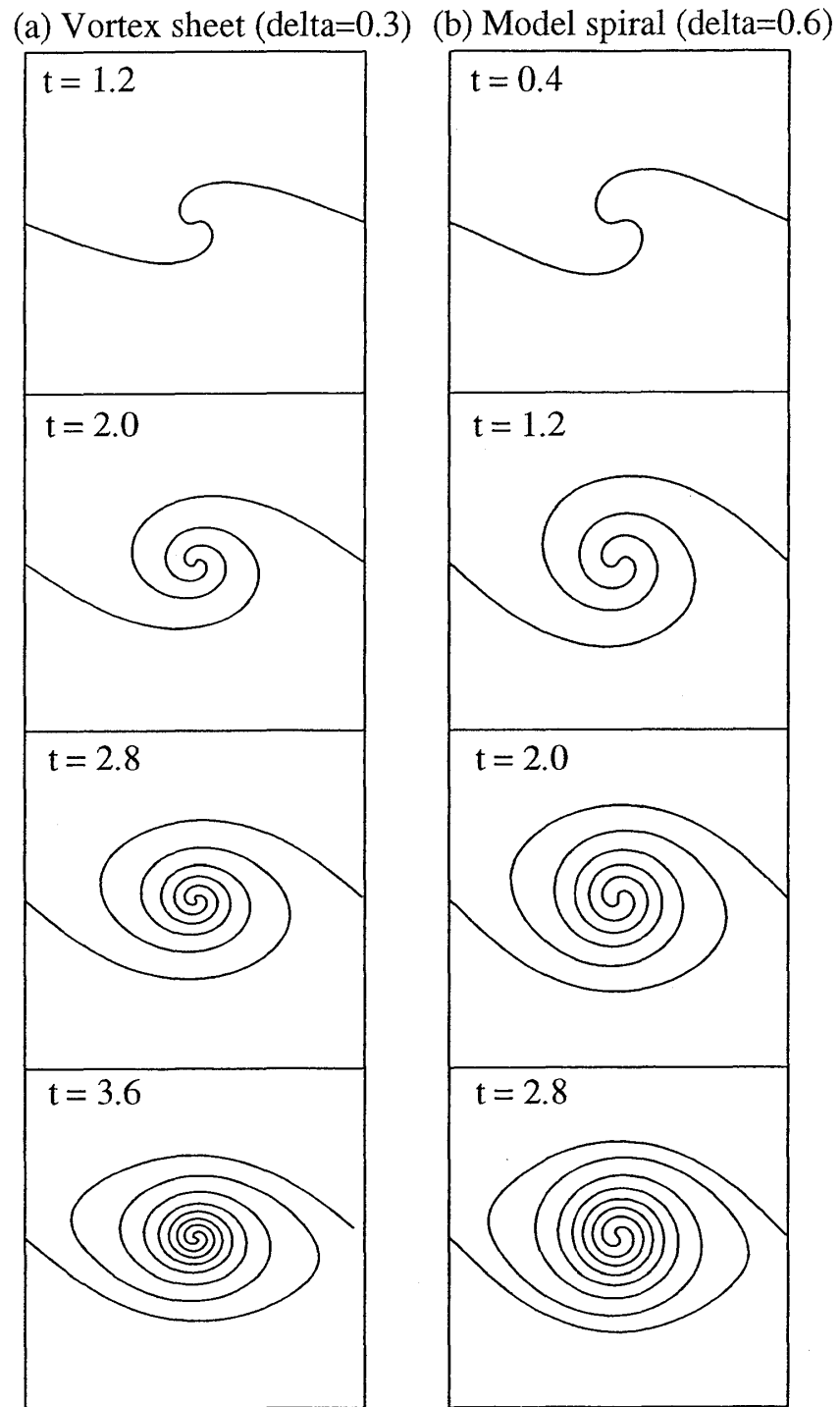


図 16: 非特異化 Birkhoff-Rott 方程式の数値解 (左側) と非特異化モデル方程式の解 (右側) の比較. 非特異化のパラメータの大きさは異なるが, 二重螺旋の形状, およびその巻上がり速度は定性的に等しい.

ことがわかるので、これを $A(\Gamma)$ と定義する.

$$Y(\Gamma, \tau) - Q(\Gamma, \tau) = Y(\Gamma, 0) - Q(\Gamma, 0) = -(1 + \cos 2\pi\Gamma) \equiv A(\Gamma).$$

この関係と各空間変数間の関係, $X^2 + Y^2 = 1$ と $Q^2 - P^2 = 1$ によって, (34) は Q だけの閉じた方程式に帰着される.

$$\left(\frac{dQ}{d\tau}\right)^2 = -(1 - (Q + A)^2)(1 - Q^2). \quad (35)$$

この方程式の解は楕円関数で書ける. 実際, $Q = \frac{1}{Q_1} + 1$ と変数変換すると方程式 (35) は

$$\left(\frac{dQ_1}{d\tau}\right)^2 = -2A(A+2)Q_1^3 - (A^2 + 6A + 4)Q_1^2 - 2(A+2)Q_1 - 1,$$

となり, その解は Weierstrass の楕円関数 $\wp(\tau)$ を使って, 次のように書くことができる.

$$Q_1(A, \tau) = -\frac{2}{A(A+2)} \left(\wp(\tau) + \frac{A^2 + 6A + 4}{12} \right).$$

よって, $K_\delta(\Gamma) = 2(\delta^2 - A(\Gamma))$ なる関係から, Q は A と t で明示的に

$$Q(A, t) = 1 - \frac{6A(A+2)}{12\wp\left(\frac{t}{2(\delta^2 - A)}\right) + A^2 + 6A + 4},$$

と与えられる.

このように解が与えられれば, その複素時間特異点を考えることは容易である. つまり, 解の分母の零点を求めればよい.

$$12\wp\left(\frac{t}{2(\delta^2 - A)}\right) + (A^2 + 6A + 4) = 0. \quad (36)$$

今, 空間変数 A を固定して考える. この時, この代数方程式の解は \wp 関数の性質 (位数 2 の楕円関数) から, 楕円関数の基本周期平行四辺形の中に極対称な二つの解が存在することがわかる. さらに二重周期性から, この二点は全複素時間領域に二重周期的に分布している. このような二点が A を選ぶ度に決まるので, A を変化させると, 基本周期平行四辺形の中に極対称な二つの特異点が連続的に帯状に分布し, かつそれが二重周期的に全複素時間領域に広がっているような特異点の分布が得られる. よって, 二重螺旋の巻上がり運動と二重周期的な特異点分布の関係を指摘した前述の数値計算の結果を, このモデルは支持している.

次に非特異化パラメータ $\delta \rightarrow 0$ なる場合の, 特異点分布の挙動について調べる. 特異点は代数方程式 (36) の解であるが, $A \neq 0$ の時には, $\delta \rightarrow 0$ としても, 二つの特異点は常に存在する. よって, 特異点の衝突といった現象はこの場合観測されない. 一方で, $A = 0$ の場合には, そのようなことが起こる可能性がある. しかしながら, $A = 0$ すなわち $\Gamma = 0.5$ は渦糸の位置に相当し, モデルではそこに passive scalar は存在しないと定義したために, 直接そこでの観測はできない. そこで, 我々はまず $\delta \neq 0$ としたまま, $A \rightarrow 0$ として, $A = 0$ での Q の値を定義して, その複素時間における特異点の分布の $\delta \rightarrow 0$ での振舞を調べる. 具体的に計算すると, Q と Q

の Γ に関する一階微分の値は δ によらず 0 であることがわかるので, 特異点の衝突などが起こり得るのは, Q の Γ に関する二階微分

$$\frac{d^2 Q}{d\Gamma^2}(0, t) = \frac{12\pi^2}{3\wp\left(\frac{t}{2\delta^2}\right) + 1}, \quad (37)$$

である. この二階微分の特異点は次の代数方程式の解である.

$$\wp\left(\frac{t}{2\delta^2}\right) = -\frac{1}{3}.$$

δ が 0 でない時は, これまでの議論と同様にして, 基本周期平行四辺形の中に極対称な二つの特異点が存在する. これら二つの特異点は, $\delta \rightarrow 0$ で基本周期平行四辺形とともに縮小率 δ^2 で原点に縮小してゆく. この時, 基本周期平行四辺形の大きさも縮小してゆくので, $\delta = 0$ では, 複素時間平面の上に広がっていたすべての特異点が原点上で衝突する.

このような現象が渦層の場合にも起こっていることを観察するため, 我々は δ を変えた時に非特異化方程式と非特異化モデル方程式から計算される Q の二階微分の周期 (渦層の数値解については, 渦層が巻き上がってから観測される周期) を 図 17 にプロットする. なお, 二階微分の特異点を求めるのは困難だが, モデルの解析が示唆しているように二つの特異点の距離は基本周期平行四辺形の大きさと共に小さくなっていくので, 二階微分の周期を考えることは, 二つの特異点の距離を考えることに他ならない. この図に見えるように, 二つの周期は次第に 0 に近付いている. 最小二乗近似によるあてはめによれば, この渦層の場合は $1.02\delta^2 + 0.85\delta$, モデルの場合は δ^2 で近似される. よってともに, 二次関数的に 0 に近付くことがわかる. ここで, 簡単な計算から二重螺旋の中心における, Q の二階微分は変数 y の一階微分の二乗に等しいことがわかるので, 中心付近での渦巻の挙動は無限速度に巻上がる螺旋ということになる. なぜなら Q の二階微分の周期は y の一階微分の周期を表しており, この周期が 0 に近付くと言うことは, 原点での二重螺旋の接線が非常に速く回転することを意味しているからである.

4.5 本章のまとめ

本章において, 渦法による非特異化二次元渦層運動の複素時間領域における特異点の分布を数値的に調べた. 非特異化パラメータ δ が 0 でない時, 特異点は実時間軸を上下に挟むように帯状に連続分布しており, 非特異化した方程式の解は実時間の上に特異点を持たないことがわかった. そのため渦法による非特異化方程式の数値計算が安定にすすむ. さらに, その帯構造は虚時間方向と実時間方向に二重周期的に存在しているので, 周期境界条件を持つ二次元渦層運動の複素時間特異点の分布は二重周期的な帯状分布で特徴付けられる. また, 実際の非特異化方程式の数値解の様子とこの特異点構造の観察から, 巻上がる二重螺旋運動と二重周期的な特異点の分布の関係が指摘された. この指摘は簡単な巻上がり渦モデルによっても定性的に支持されることがわかった.

また, 非特異化パラメータ δ が 0 に近づく時, この分布の二重周期的帯構造は維持されつつも, その帯領域の幅は狭くなり, δ が 0 になると帯領域の入口にある二つの複素特異点が実時間上で衝突し, 遂には帯領域への入口は閉ざされてしまう. そのため, $\delta = 0$ に相当する Birkhoff-Rott

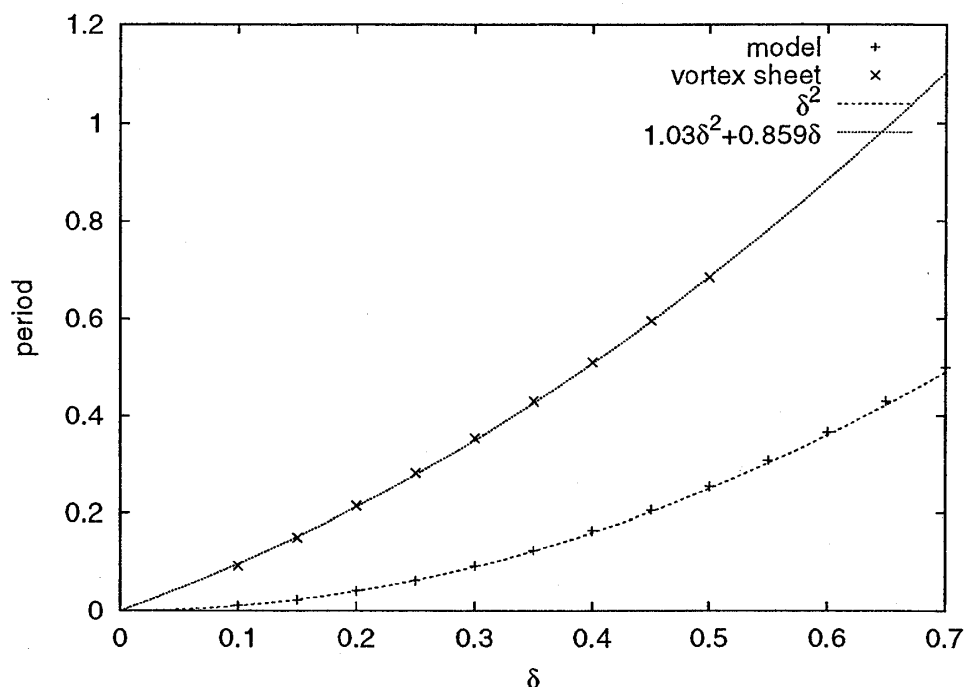


図 17: 非特異化パラメータ δ に対する, 非特異化 Birkhoff-Rott 方程式 (上) と非特異化モデル方程式 (下) の数値解 Q の二階微分の周期とそれらのデータの最小二乗法による近似曲線

方程式の解はこの衝突実時間において, 解析接続で解が定義できなくなり, 積分経路が帯領域に侵入できないために, 二重螺旋に巻き上がる解も観察されないことがわかる. また二重螺旋巻き上がりモデルとの比較を通じて, $\delta \rightarrow 0$ になるにつれて, 渦層の螺旋の中心における構造は無限速度で巻き上がる渦巻に近付いていくことが示唆された. このことは, あくまでモデルとの比較による推定に過ぎないが, 局所的な渦巻の構造に関して, このような無限巻数の螺旋巻き上がり運動を仮定することで, 従来の特異点の出現を解の空間に含めることができ, Birkhoff-Rott 方程式の解として二重螺旋解の存在を定義できる可能性がある. この研究は今後の課題である.

最後に数理モデルについて一言述べておく. このモデルは実際の非特異化渦層の時間発展における, 二重螺旋巻き上がりの運動を近似したものである. また, 図 9 で示したように非特異化二次元渦層は, さらに時間が経過すると局所的な巻き上がり運動だけでなく大域的に渦層が引き延ばされるので, その複素時間特異点構造は単なる二重周期的なものではなくて, もっと複雑化することが予測される. したがって, このモデルは非特異化渦層の長時間発展におけるある中間的な時間幅での運動のみを近似しているものであることに注意する.

5 渦層研究の現在と今後

これまで述べたように二次元渦層の研究は極めて長い歴史をもっており, 様々なことが明らかになった. しかし, 二次元の渦層において, 依然として二重螺旋解への巻き上がりが起こるか

どうかについては完全に解決しているわけではない. またこのような二重螺旋解が特異点生成後の一意解である保証はどこにもない. この点については, 様々な方法で数値計算をしてみれば, 中心に特異点を持つ二重螺旋解が Birkhoff-Rott 方程式の一意解であるようにも見えるが, これを正しいと主張するにはもっと精密な議論が必要であろう.

さて, 現在では三次元空間における渦層の研究が主流になっている. しかし, 三次元問題に対しては, その数学解析は勿論のこと, 二次元の場合とは違ってその数値計算は 計算機的能力が飛躍的に進歩した現在においても極めて困難である. そこで以下に, 渦層研究の今後を展望する意味でも, 三次元渦層についてこれまでに知られている事実を簡単にサーベイして本稿を終わりたい.

§2 で示したように三次元渦層の方程式は (8) で与えられているが, この方程式の局所解の存在は Sulem らによって以下のように与えられている [76]. 考える空間は $b_s = \{(\rho, \sigma); \rho \in \mathbf{R}^2, |\sigma| < s\}$ で B_s に入っており, かつ $|\sigma| < s$ で $L^2(\mathbf{R}^2 + i\sigma)$ に入っている関数空間 $B_{s'}$ であり, そのノルムを次のように定義する.

$$|||u|||_s = \|u\|_s + \|u\|_{L^2}.$$

この時, 次が成立つ.

Theorem 6 $B_{s'}$ に入っている初期値に対して, $B_{s'}$ の中に $|t| < \alpha(s_0 - s)$ で三次元 Birkhoff-Rott 方程式 (Kaneda の方程式) の解析的な解が存在する.

次に時間大域的な解の存在であるが, 三次元渦層は二次元渦層を含んでいるために解に有限時間で特異点が発生することは明らかである. しかし, 三次元渦層では空間次元が一つ増えているので, 特異点が発生するといっても, 二次元渦層のように一点で出現するのか, あるいは特異線となって出現するのかは明らかでない. また, 二次元渦層とは異なる特異点生成の可能性も排除できない. これらの問題に答えを与えるのが三次元渦層に現れる特異性に関する研究の目的である.

最初にその問題に取り組んだのは Ishihara と Kaneda[31, 32] である. 彼ら Moore の漸近解析を三次元 Birkhoff-Rott 方程式に応用して, 流れ方向だけでなく流れに垂直な方向にも二次元の場合に見られたような曲率特異性が発生しうることを指摘した. それから, Brady と Pullin[8] はある特殊な対称性を持つ三次元渦層に現れる特異性について Moore の漸近解析を用いて議論し, それが二次元の渦層と同様の曲率爆発であることを示している. また, Nitsche[57] は軸対称渦層を考えて数値計算から特異性の研究している. 最近では, Hou ら [29] が三次元渦層方程式に現れる特異積分の特異成分の主要項をうまく抜き出し, それを元にモデルを作って数値計算することにより, 三次元渦層に現れる特異点を調べている. このモデルの計算によれば, 三次元渦層の特異点は二次元の流れ方向にまず特異点が孤立点として発生し, その特異点は二次元で観察された曲率特異性であることが示唆されている.

これらの特異点に関する結果はすべて二次元で発生した曲率爆発の発生が支配的であることを指摘している. その一方で, この二次元特異点とは異なる特異性の特徴付けについても調べられている. 筆者は, ある円柱形をした三次元渦層に軸対称性を仮定した問題を考え, そこに起こる特異性を数値的に研究した [69]. この場合, 対称性により二次元的な流れ方向の特異

点は生成しないので、この対象に特異性が現れれば、それは二次元と異なる特異性を捉えていることになる。その結果、流れに垂直な方向、すなわち渦線に沿った渦層の強さの一階微分がカスプになるという特異点生成を数値的に検出することができた。この特異性は次元渦層の特異点が渦層の強さがカスプになるという性質と比べれば弱い特異性であるが、二次元の場合とは異なる特異性の出現を表していることになる。今後は、この新しい弱い特異性と二次元特異性のどちらが早く出現するかなどを調べる必要があるが、そのためには二次元渦層の場合以上に高速・高精度な数値計算方法の開発が必要になる。

また、応用の観点から三次元渦層の渦法による数値計算も行われている。Caffisch ら [17] は軸対称な円筒渦層の数値計算を行い、マッシュルーム様の渦層の巻き上がりを観測している。また、著者は彼らの結果を三次元に拡張して、次のような円柱座標系における定常速度場を考えた。

$$\vec{u}(r, \theta, z) = \begin{cases} (0, \frac{\Gamma_1}{2\pi r}, 0) & r < R, \\ (0, \frac{\Gamma_2}{2\pi r}, 0) & r > R, \end{cases}$$

なお、 Γ_1 と Γ_2 は回転方向の速さを表すパラメータである。この時、速度場は半径 R の円の内側と外側で θ 方向に不連続になっているので三次元円柱渦層が存在するが、我々はこの定常渦層に微少な摂動を加えて数値計算を行った。詳しいことは論文 [68] を参照してもらうことにして、その数値解を図 18 に示す。なおこの計算では内側の強さが $\Gamma_1 = -2.5$ 外側の強さが $\Gamma_2 = 0.5$ である。これによると、単純な円筒渦層は最初縦方向に巻き上がり、さらにその後回転方向に巻き上がる。このように二段階にわたって渦層は巻き上がり、最終的に複雑な形状に発展していく。

三次元渦層の数値計算の例として、他には Lindsay と Krasny [46] が渦法に対する高速数値計算アルゴリズムの応用として三次元円板状渦層の巻き上がりの数値計算を行っている。このようにいくつかの数値例が知られているものの、三次元渦層の数値計算には極めて計算機資源を必要とするために、長時間の発展を追跡することは現在でも簡単ではない。実際に図 18 の数値結果を得るためには、高速な数値計算アルゴリズムと 8 CPU の並列計算機を併用しても半月以上の計算時間がかかっている。なお、これは 2000 年当時のデータなので、現在ではもう少し早く計算できると思われるが、これよりさらに長時間の時間発展を追うためには数値解の近似の精度を一層あげる必要があり、そうなればより高速な計算機が必要となり、結局のところ計算機の性能が数値計算の要求を十分満たすことはまだなさそうである。したがって、渦層の現実流体への応用面から見れば三次元渦層の数値計算も、より早い計算機とより洗練された高速数値計算法の開発などとともに、これからの重要なテーマである。

謝辞

本稿は 2003 年 8 月に札幌天神山国際ハウスで開催された「語ろう数理解析」での講演を元に作成したものである。この場を借りて、このような機会を与えていただき、そしてその成果がこうして出版されることになったことを主催者の皆様に感謝したい。また、名古屋大学大学院の石原卓先生には本論文に対して貴重な助言を頂戴した。また筆者はここで触れた研究の遂行

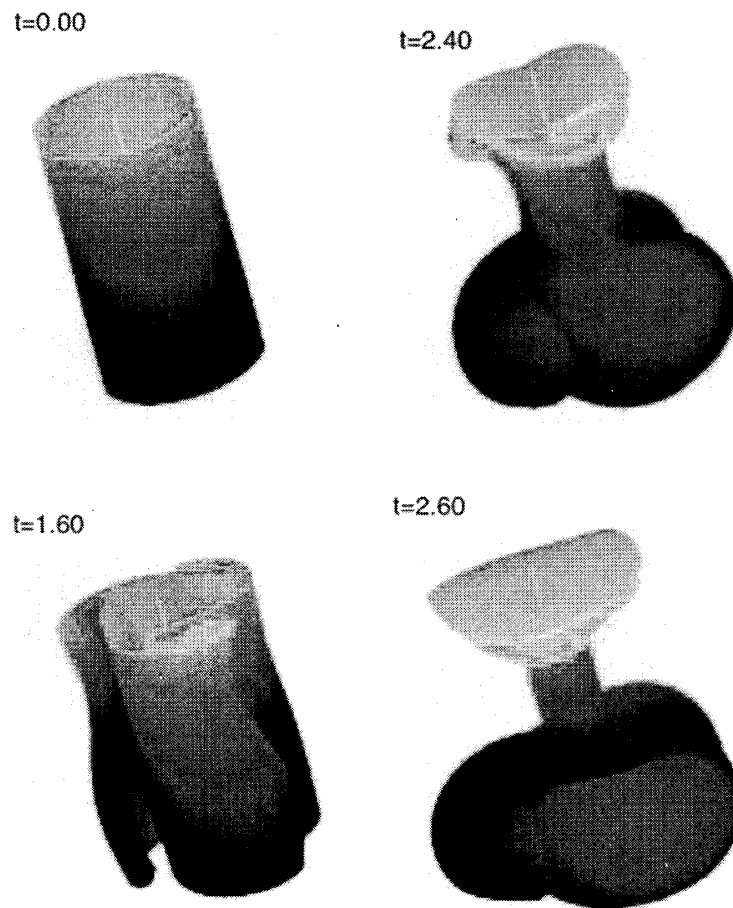


図 18: 回転流中の円筒渦層の時間発展の様子. 初期において円筒形をしていた渦層が不安定化し, 縦方向に三個所で巻き上がった ($t = 1.6$) 後, 今度は回転方向に巻き上って ($t = 2.4$), 最終的にマッシュルーム状 ($t = 2.6$) になる. このように三次元渦層の場合には二段階の巻き上がりが起こる.

の上で日本学術振興会 科学技術研究費若手研究 (B)(課題番号 14740069) の援助を受けている。

参考文献

- [1] M. Abid, A. Verga, “Stability of a vortex sheet roll-up”, *Phys. of Fluids* **14**(11) pp. 3829–3834 (2002).
- [2] R.C. Alexander, “Family of similarity flows with vortex sheets”, *Phys. Fluids* **14**(2), pp.231–239 (1971).
- [3] G.R. Baker and M.J. Shelley, “On the connection between thin vortex layers and vortex sheets”, *J. Fluid Mech.* vol. **215**, 161–194 (1990).
- [4] A. Betz, “Verhalten vor wirbelsystemen”, *ZAMM* **12**, pp.164–174 (1932).
- [5] G. Birkhoff and J. Fisher, “Do vortex sheet roll up ?”, *Rend. Circ. Mat. Palermo* **8**, pp.77–90 (1959).
- [6] G. Birkhoff, “Helmholtz and Taylor instability”, *Proc. Symp. Appl. Math.* **12**, pp.55–76 (1962).
- [7] C. Bögers, “On the numerical solution of the regularized Birkhoff-Rott equations”, *Math. Comp.* **53**, pp.141–156 (1989).
- [8] M. Brady and D.I. Pullin, “On singularity formation in three-dimensional vortex sheet evolution”, *Phys. Fluids* **11**, pp.3198–3200 (1999).
- [9] R.E. Caflisch and O.F. Orellana, “Long time existence for a slightly perturbed vortex sheet”, *Commun. Pure Appl.Math.* **39**, pp.807–838 (1986).
- [10] R.E. Caflisch and O.F. Orellana, “Singular solutions and ill-posedness for the evolution of vortex sheets”, *SIAM J. Math. Anal.* **20**, pp.293–307 (1989).
- [11] R.E. Caflisch and J. Lowengrub, “Convergence of the vortex method for vortex sheets”, *SIAM J. Numer. Anal.* **26**, pp.1060–1080 (1989).
- [12] R.E. Caflisch, O.F. Orellana and M. Siegel, “A localized approximation method for vortical flows”, *SIAM J. Appl. Math.* **50**, pp.1517–1532 (1990).
- [13] R.E. Caflisch and S. Semmes, “A nonlinear approximation for vortex sheet evolution and singularity formation”, *Physica D* **41**, pp.197–207 (1990).
- [14] R.E. Caflisch, “Analysis for the evolution of vortex sheets”, *Lectures in Appl. Math.* **28**, pp.67–83 (1991).

- [15] R.E. Caflisch and X. Li, “Lagrangian theory for 3D vortex sheets with axial or helical symmetry”, *Transport Theory Stat. Phys.* **21**, pp.559–578 (1992).
- [16] R.E. Caflisch, N. Ercolani, T.Y. Hou and Y.Landis, “Multi-valued solutions and branch point singularities for nonlinear hyperbolic or elliptic systems”, *Commun. Pure Appl. Math.* **46**, pp.453–499 (1993).
- [17] R.E. Caflisch, X. Li and M.J. Shelley, “The collapse of an axi-symmetric, swirling vortex sheet”, *Nonlinearity* **6**, pp.843–867 (1993).
- [18] R.E. Caflisch, T.Y. Hou and J. Lowengrub, “Almost optimal convergence of the point vortex method for vortex sheets using numerical filtering”, *Math. Comp.* **228**, pp.1465–1496 (1999).
- [19] A.J. Chorin and P.S. Bernard, “Discretization of a vortex sheet with an example of roll-up”, *J. Comput. Phys.* **13**, pp.423–429 (1973).
- [20] S.J. Cowley, G.R. Baker and S. Tanveer, “On the formation of Moore curvature singularities in vortex sheets”, *J. Fluid Mech.* **378**, pp. 233–267 (1999).
- [21] J. Duchon and R. Robert, “Global vortex sheet solutions of Euler equations in the plane”, *J. Diff. Eq.* **73**, pp.215–224 (1988).
- [22] D.G. Ebin, “Ill-posedness of the Rayleigh-Taylor and Helmholtz Problems for incompressible fluids”, *Commun. Partial Diff. Eq.* **13**(10), pp.1265–1295 (1988).
- [23] J.S. Ely and G.R. Baker, “High-precision calculations of vortex sheet motion”, *J. Comput. Phys.* **111**, pp. 275–281 (1993).
- [24] P.T. Fink and W.K. Soh, “Calculation of vortex sheets in unsteady flow and applications in ship hydrodynamics”, *Proc. 10th Symp. on Naval Hydrody., U.S. Office of Naval Research*, pp.463–489 (1974).
- [25] P.R. Fink and W.K. Soh, “A new approach to roll-up calculations of vortex sheets”, *Proc. Roy. Soc. London A* **362**, pp.195–209 (1978).
- [26] J.P. Guiraud and R.Kh.Zeytounian, “A double-scale investigation of the asymptotic structure of rolled-up vortex sheets”, *J. Fluid Mech.* **79**, pp.93–112 (1977).
- [27] T.Y. Hou, J.S. Lowengrub and M.J. Shelley, “The long-time motion of vortex sheets with surface tension”, *Phys. Fluids*, **9**, pp.1933–1954 (1997).
- [28] T.Y. Hou, J. Lowengrub and R. Krasny, “Convergence of a point vortex method for vortex sheets”, *SIAM J. Numer. Anal.* **28**, pp.308–320 (1991).

- [29] T.Y. Hou, G. Hu and P. Zhang, “Singularity fomation in three-dimensional vortex sheets”, *Phys. Fluids* **15**, pp.147–172 (2003.)
- [30] M. Iima and T. Yanagita, “Is a 2D butterfly able to fly by symmetric flapping?”, *J. Phys. Soc. Jpn*, **70** pp. 5–8 (2001).
- [31] T. Ishihara and Y. Kaneda, “Spontaneous singularity formation in the shape of vortex sheet in three-dimensional flow”, *J. Phys. Soc. Japan* **63**(2), pp.388–392 (1994).
- [32] T. Ishihara and Y. Kaneda, “Singularity formation in three-dimensional motion of a vortex sheet”, *J. Fluid Mech.* **300**, pp.339–366 (1995).
- [33] H. Kaden, “Aufwicklung eines wirbels an der kante einer platte”, *Ing. Arch.* **10**, pp.411–427 (1931).
- [34] Y. Kaneda, “A family of analytical solutions of the motions of double-branched spiral vortex sheets”, *Phys. Fluids A* **1**, pp.261–266 (1989).
- [35] Y. Kaneda, “A representation of the motion of a vortex sheet in a three-dimensional flow”, *Phys. Fluids A* **2**, pp.458–460 (1990).
- [36] M. Kiya and M. Arie, “Helmholtz instability of a vortex sheet in uniform shear flow”, *Phys. Fluids* **22**(2), pp. 378-379.
- [37] R. Krasny, “A study of singularity formation in a vortex sheet by the point-vortex approximation”, *J. Fluid Mech.* **167**, pp. 65–93 (1986).
- [38] R. Krasny, “Desingularization of periodic vortex sheet roll-up”, *J. Comput. Phys.* **65**, pp.292–313 (1986).
- [39] R. Krasny, “Computation of vortex sheet roll-up in the Trefftz plane”, *J. Fluid Mech.* **184**, pp.123–155 (1987).
- [40] R. Krasny, “A vortex-dipole sheet model for a wake”, *Phys. Fluids A* **1**(2), pp.173–175 (1989).
- [41] R. Krasny, “Vortex sheet computations: roll-up, wakes, separation”, *Lectures in Appl. Math.* **28**, pp.385–402 (1991).
- [42] R. Krasny and M. Nitsche, “The onset of chaos in vortex sheet flow”, *J. Fluid Mech*, **454** pp. 47–64 (2003)
- [43] D. Küchemann and J. Weber, “Vortex motions”, *ZAMM* **45**, pp.457–474 (1965).
- [44] P.D. Lax, “Development of singularities of solutions of nonlinear Hyperbolic Partial Differential equations”, *J. Math. Phys.* **5**, pp.611–613 (1964).

- [45] R.Legendre, “Vortex sheet rolling-up along leading edges of Delta wings”, *Progress in Aero. Sci.* **7**, pp.7–33 (1966).
- [46] K. Lindsay and R. Krasny, “A Particle method and adaptive treecode for vortex sheet motion in three-dimensional flow”, *J. Comput. Phys.* **172** pp.879–907 (2001).
- [47] J. Liu and Z. Xin, “Convergence of vortex methods for weak solutions to the 2-D Euler equation with vortex sheet data”, *Comm. Pure Appl. Math.* **48**, pp.611–628 (1995).
- [48] A.J. Majda, “Remarks on weak solutions for vortex sheets with a distinguished sign”, *Indiana Univ. Math. Journal* **42**(3), pp.921–939 (1993).
- [49] D.I. Meiron, G.R. Baker and S.A. Orszag, “Analytic structure of vortex sheet dynamics. Part 1. Kelvin-Helmholtz instability”, *J. Fluid Mech.* **114**, pp.283–298 (1982).
- [50] D.W. Moore, “The discrete vortex approximation of a vortex sheet”, *Airforce Office of Scientific Research report*, Cal. Inst. Tech., pp.1069–1084 (1971).
- [51] D.W. Moore and R. Griffith-Jones, “The stability of an expanding circular vortex sheet”, *Mathematika* **21**, pp. 128–133 (1974).
- [52] D.W. Moore, “The rolling-up of a semi-infinite vortex sheet”, *Proc. Roy. Soc. London A* **345**, pp.417–430 (1975).
- [53] D.W. Moore, “The spontaneous appearance of a singularity in the shape of an evolving vortex sheet”, *Proc. R. Soc. London A* **365**, pp. 105–119 (1979).
- [54] D.W. Moore, “Numerical and analytical aspects of Helmholtz instability”, *Theoretical and Appl. Mech.* (ed. F.I. Niordson and N. Olhoff) IUTAM, pp. 263–274 (1985).
- [55] T. Nishida, “A note on a theorem of Nirenberg”, *J. Diff. Geom.* **12**, pp.629–633 (1977).
- [56] M. Nitsche and R. Krasny, “A numerical study of vortex ring formation at the edge of a circular tube”, *J. Fluid Mech.* **276**, pp.139–161 (1994).
- [57] M. Nitsche, “Singularity formation in a cylindrical and a spherical vortex sheet”, *J. Comput. Phys.* **173** pp.208 (2001).
- [58] L. Prandtl, “Über die ebtstehung von wirbeln in der idealen flüssigkeit vorträge aus dem gebiete der hydro- und aerodynamik”, (ed. von Karman and Levi Civita), Springer.
- [59] P.I. Pullin, “The large-scale structure of unsteady self-similar rolled-up vortex sheets”, *J. Fluid Mech.* **88**(3), pp.401–430 (1978).
- [60] P.I. Pullin and W.R.C. Phillips, “On a generalization of Kaden’s problem”, *J. Fluid Mech.* **104**, pp.45–53 (1981).

- [61] P.I. Pullin, "On the similarity solutions for the self-induced motion of two-branched vortex sheets", in *Math. Aspects Vortex Dyn.*, ed. R.E. Caflisch, SIAM pp.97–106 (1989).
- [62] L. Rosenhead, "The formation of vortices from a surface of discontinuity", *Proc. Roy. Soc. London A* **134**, pp.170–192 (1931).
- [63] J.W. Rottman and P.K. Stanby, "On the ' δ -equation' for vortex sheet evolution", *J. Fluid Mech.* **247**, pp.527–549 (1993).
- [64] P.G. Saffman, "Vortex Dynamics", Cambridge University Press, §8 (1992).
- [65] T. Sakajo and H. Okamoto, "Numerical computation of vortex sheet roll-up in the background shear flow", *Fluid Dyn. Res.* **17**, pp. 195–212 (1996).
- [66] T. Sakajo, "An application of Draghicescu's fast summation method to vortex sheet motion", *J. Phys. Soc. Japan* **67**, pp.462–470 (1998).
- [67] T. Sakajo, "Interactions of two vortex sheets", *Adv. Math. Sci. Appl.* **2**, pp.631–662 (1998).
- [68] T. Sakajo, "Numerical computation of a three-dimensional vortex sheet in a swirl flow", *Fluid Dyn. Res.* **28**, pp.423–448 (2001).
- [69] T. Sakajo, "Formation of curvature singularity along vortex line in an axi-symmetric, swirling vortex sheet", *Phys. Fluids* **14**, pp. 2886–2897 (2002).
- [70] T. Sakajo, "Analytic continuation of the Birkhoff-Rott equation in complex-time domain", *Euro. J. Appl. Math.* (2003) in press .
- [71] T. Sakajo, "Motion of a vortex sheet on a sphere", *Phys. Fluids*. **16**, pp. 717–727 (2004).
- [72] M.J. Shelley, "A study of singularity formation in vortex-sheet motion by a spectrally accurate vortex method", *J. Fluid Mech.* **244**, pp.493–526 (1992).
- [73] A. Sidi and M. Israeli, "Quadrature methods for periodic singular and weakly singular Fredholm integral equations", *J. Sci. Comp.* **3**(2), pp.201–231 (1988).
- [74] J.H.B. Smith, "Improved calculations of leading-edge separation from slender, thin, delta wings", *Proc. Roy. Soc. London A*. **306**, pp.67–90 (1968).
- [75] M. Stern, "The rolling-up of a vortex sheet", *ZAMP* **7**, pp.326–342 (1956).
- [76] C. Sulem, P.L. Sulem, C. Bardos and U. Frisch, "Finite time analyticity for the two and three dimensional Kelvin-Helmholtz instability", *Commun. Math. Phys.* **80**, pp.485–516 (1981).

- [77] C. Sulem, P.L. Sulem and H. Frisch, “Tracing complex singularities with spectral methods”, J. Comput. Phys. **50**, pp.138–161 (1983).
- [78] H. Takami, “A numerical experiment with discrete vortex approximation with reference to the rolling up of a vortex sheet”, Department of Aeronautics and Astronomy, Stanford University, report SUDAER 202, (1964).
- [79] F.L. Westwater, “Rolling up of the surface of discontinuity behind an aerofoil of finite span”, Aeronautics Research Council Reports and Memoranda, **1962**, (1935).
- [80] S. Wu, “Recent Progress in Mathematical Analysis of Vortex Sheets”, Proc. ICM Beijing **3** pp.233–242 (2002).